# Geoide e Ondulazioni Geoidali

## Introduzione alla Geodesia Fisica e al Problema della Forma della Terra

La determinazione precisa della forma della Terra rappresenta uno dei problemi scientifici più antichi e complessi che l'umanità abbia mai affrontato. Quella che potrebbe sembrare una questione semplice e risolta da secoli si rivela, a un'analisi più approfondita, un problema di straordinaria complessità che coinvolge fisica, matematica, geofisica e tecnologie di misurazione sempre più sofisticate. La geodesia fisica, la disciplina che si occupa specificamente di questo problema, ha sviluppato nel corso dei secoli concetti e metodologie che rappresentano alcuni dei risultati più raffinati della scienza applicata.

Nella concezione comune e nelle prime approssimazioni scientifiche, la Terra viene spesso descritta come una sfera. Questa approssimazione, sebbene utile per molti scopi pratici e didattici, è tuttavia inadeguata quando si richiedono precisioni superiori al chilometro o quando si studiano fenomeni geodetici e geofisici di dettaglio. Una migliore approssimazione è quella di un ellissoide di rivoluzione, ovvero una superficie ottenuta ruotando un'ellisse attorno al suo asse minore. Questa forma tiene conto dello schiacciamento polare causato dalla rotazione terrestre, che produce una forza centrifuga maggiore all'equatore rispetto ai poli.

L'ellissoide di riferimento è una superficie matematica ideale, perfettamente liscia e regolare, definita da parametri geometrici precisi. L'ellissoide GRS80 (Geodetic Reference System 1980), che è attualmente lo standard internazionale più utilizzato, ha un semiasse maggiore (raggio equatoriale) di 6.378.137 metri e uno schiacciamento di circa 1/298,257, il che significa che il semiasse minore (raggio polare) è più corto del semiasse maggiore di circa 21.385 metri. Questo ellissoide fornisce una descrizione notevolmente accurata della forma media della Terra, ma rimane comunque una idealizzazione matematica.

La realtà fisica della Terra è molto più complessa di quanto qualsiasi ellissoide possa descrivere. La superficie fisica del nostro pianeta è irregolare, caratterizzata da montagne che si innalzano fino a quasi nove chilometri sopra il livello del mare e fosse oceaniche che sprofondano fino a undici chilometri sotto di esso. Ma anche al di là di queste irregolarità topografiche evidenti, la Terra possiede una struttura molto più sottile e profonda che si manifesta nel suo campo gravitazionale. La distribuzione non uniforme della massa all'interno del pianeta, causata da variazioni nella densità della crosta, del mantello e del nucleo, produce un campo gravitazionale che varia nello spazio in modo complesso.

È proprio questa variabilità del campo gravitazionale che conduce al concetto fondamentale di geoide. Il geoide è definito come la superficie equipotenziale del campo gravitazionale terrestre che meglio approssima il livello medio degli oceani in condizioni di calma, estesa idealmente sotto i continenti. In altre parole, il geoide è la superficie su cui il potenziale

gravitazionale è costante e che rappresenta, in un certo senso, la "vera" forma della Terra dal punto di vista fisico, distinguendola dalle approssimazioni puramente geometriche come l'ellissoide.

La differenza tra il geoide e l'ellissoide di riferimento è ciò che chiamiamo ondulazione geoidale o altezza geoidale. Questa quantità, generalmente indicata con la lettera N, può essere positiva o negativa e varia tipicamente tra -110 metri e +85 metri circa in diverse località della Terra. Dove il geoide si trova al di sopra dell'ellissoide, l'ondulazione è positiva; dove si trova al di sotto, è negativa. Queste ondulazioni riflettono direttamente le anomalie nella distribuzione di massa all'interno della Terra e forniscono informazioni preziose sulla struttura interna del pianeta.

# Fondamenti Teorici del Potenziale Gravitazionale Terrestre

Per comprendere adeguatamente il concetto di geoide e le metodologie per la sua determinazione, è essenziale iniziare con una trattazione rigorosa del potenziale gravitazionale. In fisica classica, il potenziale gravitazionale in un punto dello spazio è definito come il lavoro necessario per portare un'unità di massa dall'infinito a quel punto contro il campo gravitazionale. Per un corpo puntiforme di massa M, il potenziale gravitazionale a distanza r è dato da $V = -GM/r$, dove G è la costante gravitazionale universale (approssimativamente $6{,}674 \times 10^{-11}$ $m^3/(kg \cdot s^2)$).

Per un corpo esteso come la Terra, il potenziale in un punto P esterno alla massa deve essere calcolato integrando i contributi di tutti gli elementi di massa che compongono il pianeta. Se indichiamo con $\rho(r')$ la densità della Terra nel punto r' e con $|r - r'|$ la distanza dall'elemento di massa al punto P, il potenziale gravitazionale è dato da $V(r) = -G \iiint \rho(r')/|r - r'| \, dV'$, dove l'integrale triplo si estende su tutto il volume della Terra.

Questo integrale è generalmente impossibile da calcolare analiticamente a causa della complessità della distribuzione di densità all'interno della Terra. Tuttavia, per punti esterni alla Terra e sufficientemente lontani dal centro, il potenziale può essere espresso come uno sviluppo in serie utilizzando le armoniche sferiche. Questa rappresentazione matematica è fondamentale per tutta la geodesia fisica moderna e permette di parametrizzare il campo gravitazionale in modo sistematico.

In coordinate sferiche centrate nel centro di massa della Terra, con r che indica la distanza dal centro, θ la colatitudine (angolo misurato dal polo nord) e λ la longitudine, il potenziale gravitazionale può essere scritto come $V(r, \theta, \lambda) = GM/r \, [1 + \Sigma_{n=2}^{\infty} \Sigma_{m=0}^{n} (a/r)^n P_{nm}(\cos \theta) (C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda))]$, dove a è il raggio medio terrestre, $P_{nm}$ sono le funzioni associate di Legendre, e $C_{nm}$ e $S_{nm}$ sono i coefficienti armonici che descrivono la distribuzione di massa della Terra.

I coefficienti armonici di grado basso catturano le caratteristiche su larga scala della forma e del campo gravitazionale terrestre. Il termine di grado zero (n = 0) rappresenta il potenziale di una massa puntiforme e contiene la massa totale della Terra. I termini di grado uno (n = 1) sono identicamente nulli se l'origine del sistema di coordinate è posta nel centro di massa

terrestre. Il termine di grado due (n = 2) con m = 0, caratterizzato dal coefficiente C_{20} (spesso denotato come -J_2), è particolarmente importante e rappresenta lo schiacciamento polare della Terra causato dalla rotazione.

Il coefficiente J_2 ha un valore di circa 1,0826 × 10^{-3} e domina lo sviluppo armonico dopo il termine monopolare. Questo coefficiente riflette il fatto che la Terra è schiacciata ai poli e rigonfia all'equatore, con un raggio equatoriale maggiore di circa ventuno chilometri rispetto al raggio polare. I termini di ordine superiore (n ≥ 3) rappresentano deviazioni più sottili dalla simmetria sferica e dallo schiacciamento di primo ordine, catturando irregolarità regionali e locali nella distribuzione di massa.

La determinazione accurata dei coefficienti armonici è uno degli obiettivi principali della geodesia satellitare moderna. Missioni satellitari dedicate come CHAMP, GRACE e GOCE hanno permesso di determinare questi coefficienti con precisione senza precedenti, fino a gradi e ordini superiori a duecento, rivelando una mappa dettagliata del campo gravitazionale terrestre.

# Geoide e Ondulazioni Geoidali - Parte II

## L'Ellissoide GRS80: Parametri Fondamentali e Campo Gravitazionale Normale

Il Geodetic Reference System 1980, universalmente noto come GRS80, rappresenta l'ellissoide di riferimento geocentrico adottato dall'International Union of Geodesy and Geophysics alla loro assemblea generale a Canberra nel dicembre del 1979. Questo sistema fu progettato per fornire la migliore approssimazione ellissoidale possibile alla forma e al campo gravitazionale della Terra utilizzando le conoscenze geodetiche e geofisiche disponibili alla fine degli anni settanta del ventesimo secolo.

I quattro parametri fondamentali che definiscono completamente il GRS80 sono il semiasse maggiore a, la costante gravitazionale geocentrica GM, il coefficiente armonico zonale dinamico J_2 e la velocità angolare di rotazione terrestre ω. Il semiasse maggiore è definito esattamente come a = 6.378.137 metri, un valore determinato attraverso l'analisi di molteplici misurazioni geodetiche e osservazioni satellitari. La costante gravitazionale geocentrica, che rappresenta il prodotto della costante gravitazionale universale per la massa totale della Terra, è GM = 3,986005 × 10^{14} m³/s². Il coefficiente armonico J_2, che caratterizza lo schiacciamento dinamico del campo gravitazionale terrestre, è 108263 × 10^{-8}. La velocità angolare di rotazione è ω = 7,292115 × 10^{-5} radianti al secondo, corrispondente a un periodo di rotazione di circa 86.164 secondi, ovvero un giorno siderale.

Da questi quattro parametri fondamentali, tutti gli altri parametri geometrici e fisici dell'ellissoide possono essere derivati attraverso relazioni matematiche precise basate sulla teoria dell'ellissoide di equilibrio idrostatico. Il semiasse minore b, che rappresenta il raggio polare dell'ellissoide, è determinato dalla relazione b = a(1 - f), dove f è lo schiacciamento geometrico. Per il GRS80, lo schiacciamento è f = 1/298,257222101, un valore molto piccolo

che indica quanto la Terra sia vicina alla forma sferica. Da questa relazione si ricava b = 6.356.752,3141 metri, con una differenza a - b di circa 21.385 metri che rappresenta lo schiacciamento polare causato dalla rotazione terrestre.

L'eccentricità e dell'ellissoide meridiano, che misura quanto l'ellisse generatrice si discosta da un cerchio, è definita dalla relazione $e^2 = (a^2 - b^2)/a^2 = 2f - f^2$. Per il GRS80, $e^2 = 0{,}006694380022903415749 57$. Questa eccentricità relativamente piccola, circa lo 0,67 %, conferma quantitativamente che la Terra è una sfera leggermente schiacciata ai poli piuttosto che un ellissoide fortemente deformato.

Un parametro che appare frequentemente nelle formule geodetiche è la seconda eccentricità e', definita da $e'^2 = (a^2 - b^2)/b^2 = e^2/(1 - e^2)$. Per il GRS80, $e'^2 = 0{,}006739496775482804 85$. Questa quantità emerge naturalmente quando si esprimono molte formule geodetiche in funzione della latitudine geodetica piuttosto che della latitudine geocentrica.

Il campo gravitazionale normale associato all'ellissoide GRS80 è il campo che un corpo di forma ellissoidale, con densità distribuita in strati di uguale potenziale (modello idrostatico), genererebbe se ruotasse con velocità angolare ω attorno al suo asse minore. Questo campo gravitazionale normale fornisce un riferimento teorico rispetto al quale si misurano le anomalie del campo gravitazionale reale della Terra. La gravità normale γ, ovvero l'accelerazione di gravità sulla superficie dell'ellissoide, varia con la latitudine geodetica secondo una formula nota come formula di Somigliana.

La formula di Somigliana esprime la gravità normale sulla superficie dell'ellissoide come $\gamma(\varphi) = (a\,\gamma_e \cos^2(\varphi) + b\,\gamma_p \sin^2(\varphi)) / \sqrt{(a^2 \cos^2(\varphi) + b^2 \sin^2(\varphi))}$, dove φ è la latitudine geodetica misurata dall'equatore, $\gamma_e$ è la gravità normale all'equatore e $\gamma_p$ è la gravità normale ai poli. Per il GRS80, i valori sono $\gamma_e = 9{,}7803267715$ m/s² e $\gamma_p = 9{,}8321863685$ m/s². La differenza $\gamma_p - \gamma_e$ è circa 0,0519 m/s², circa lo 0,53 % del valore medio, riflettendo l'effetto combinato della maggiore distanza dal centro terrestre all'equatore (che tende a ridurre la gravità) e della forza centrifuga più intensa all'equatore (che riduce ulteriormente la gravità apparente).

Questa variazione della gravità con la latitudine ha conseguenze pratiche immediate e storicamente importanti. Un pendolo che oscilla con un certo periodo ai poli oscillerà con periodo leggermente diverso all'equatore, perché l'accelerazione di gravità che governa il moto del pendolo varia con la latitudine. Un oggetto di massa unitaria pesa circa lo 0,5 % in più ai poli rispetto all'equatore. Questa differenza, sebbene piccola in percentuale, è significativa per molte applicazioni scientifiche e tecnologiche che richiedono misurazioni precise di forza o accelerazione, e fu uno dei primi fenomeni fisici che permise di confermare sperimentalmente la forma non sferica della Terra.

# Ondulazione Geoidale: Definizione Rigorosa e Interpretazione Fisica

L'ondulazione geoidale, universalmente denotata con il simbolo N nella letteratura geodetica, è definita rigorosamente come la distanza verticale, misurata lungo la normale

all'ellissoide di riferimento, tra la superficie dell'ellissoide stesso e la superficie del geoide. Questa definizione apparentemente semplice nasconde una ricchezza concettuale notevole e richiede una comprensione chiara delle diverse definizioni di altezza utilizzate in geodesia.

Per un punto P sulla superficie terrestre (o nello spazio circostante), possiamo definire tre tipi fondamentali di altezza, ciascuna con il proprio significato geometrico o fisico specifico. L'altezza ellissoidica h è la distanza del punto P dalla superficie dell'ellissoide di riferimento, misurata lungo la normale all'ellissoide che passa per P. Questa è una quantità puramente geometrica che può essere determinata con grande precisione mediante tecniche di posizionamento satellitare come il GPS, il GLONASS o il Galileo.

L'altezza ortometrica H è la distanza del punto P dalla superficie del geoide, misurata lungo la linea di forza del campo gravitazionale reale che passa per P. Questa è la definizione fisica naturale di altezza, corrispondente al concetto intuitivo di "elevazione sopra il livello del mare". L'altezza ortometrica è quella che appare sulle carte topografiche tradizionali e che viene utilizzata in ingegneria civile, poiché è direttamente correlata al flusso dell'acqua (che segue naturalmente le superfici equipotenziali) e ad altri fenomeni fisici governati dalla gravità.

L'ondulazione geoidale N in un dato punto è la separazione verticale tra l'ellissoide e il geoide in quel punto. Queste tre quantità sono legate dalla relazione fondamentale $h = H + N$, dove si assume che la normale all'ellissoide e la linea di forza gravitazionale siano approssimativamente parallele. Questa approssimazione è eccellente nella stragrande maggioranza dei casi pratici, poiché la deviazione della verticale (l'angolo tra la normale ellissoidica e la verticale fisica) è tipicamente inferiore a trenta secondi d'arco, rendendo l'errore indotto da questa approssimazione trascurabile per quasi tutte le applicazioni.

La relazione $h = H + N$ è di importanza pratica fondamentale nella geodesia moderna. I ricevitori GPS forniscono direttamente l'altezza ellissoidica h rispetto a un ellissoide di riferimento (tipicamente WGS84, che è praticamente identico al GRS80). Tuttavia, per la maggior parte delle applicazioni pratiche, ciò che interessa è l'altezza ortometrica H, ovvero l'elevazione sopra il livello del mare. Per convertire l'altezza GPS in altezza ortometrica, è necessario conoscere l'ondulazione geoidale N nella località di interesse. Questa conversione è diventata una operazione di routine nella moderna pratica geodetica, ma richiede l'accesso a modelli geoidali accurati.

L'ondulazione geoidale può essere positiva o negativa a seconda che il geoide si trovi rispettivamente al di sopra o al di sotto dell'ellissoide di riferimento. A livello globale, le ondulazioni geoidali mostrano una struttura complessa e geograficamente correlata che riflette la distribuzione tridimensionale di massa all'interno della Terra. I valori estremi dell'ondulazione geoidale si trovano in regioni specifiche che sono geodeticamente e geofisicamente molto interessanti.

Il massimo positivo dell'ondulazione geoidale globale, circa +85 metri, si trova nella regione dell'Indonesia, della Nuova Guinea e del Pacifico occidentale. Questa regione è caratterizzata da intensa attività tettonica, con la convergenza di molteplici placche litosferiche e la presenza di materiale caldo e meno denso nel mantello superiore. Il rigonfiamento geoidale in questa area riflette una combinazione di effetti: la presenza di

crosta oceanica giovane e calda, l'ispessimento della crosta in zone di collisione, e anomalie di densità nel mantello associate a plume termici e a dinamiche di convezione complesse.

Il minimo negativo globale, circa -106 metri (alcuni modelli indicano valori fino a -110 metri), si trova nell'Oceano Indiano meridionale, in una vasta depressione geoidale che si estende approssimativamente a sud dell'India e dello Sri Lanka. Questa profonda depressione geoidale, scoperta e mappata accuratamente solo negli ultimi decenni grazie ai dati satellitari, è stata oggetto di intense ricerche geofisiche. Studi recenti suggeriscono che sia causata da una combinazione di fattori: la presenza di materiale subdotto freddo e denso nel mantello medio e inferiore, accumulato nel corso di decine di milioni di anni di subduzione delle placche tettoniche circostanti, e la configurazione particolare delle correnti di convezione del mantello in quella regione.

# Geoide e Ondulazioni Geoidali - Parte III

## Anomalie di Gravità: Concetti Fondamentali e Classificazione

Le anomalie di gravità costituiscono il fondamento osservativo della determinazione del geoide mediante metodi gravimetrici. Un'anomalia di gravità è definita come la differenza tra il valore osservato della gravità in un punto e il valore che ci si aspetterebbe in quel punto secondo un modello di riferimento. Questa differenza riflette le deviazioni della distribuzione di massa reale della Terra rispetto al modello idealizzato, fornendo informazioni cruciali sulla struttura geologica e geofisica del pianeta.

Prima di definire rigorosamente i vari tipi di anomalie di gravità, è necessario comprendere cosa si misura effettivamente quando si effettua un'osservazione gravimetrica. I gravimetri moderni, siano essi a molla, superconduttori o atomici, misurano l'accelerazione di gravità g in un punto della superficie terrestre o nelle sue immediate vicinanze. Questa accelerazione è il risultato della combinazione di molteplici effetti: l'attrazione gravitazionale della massa terrestre, la forza centrifuga dovuta alla rotazione terrestre, e le attrazioni gravitazionali di corpi celesti esterni (principalmente la Luna e il Sole, che causano le maree terrestri).

La gravità osservata g_obs in un punto P dipende da numerosi fattori: la posizione geografica del punto (latitudine e longitudine), l'altezza del punto sopra una superficie di riferimento, la topografia circostante (le masse rocciose nelle vicinanze esercitano attrazione gravitazionale), la struttura geologica profonda (variazioni di densità nella crosta e nel mantello), e variazioni temporali dovute a maree, movimenti di masse d'acqua, e altri effetti dinamici.

Per estrarre informazioni geologicamente significative dalle misurazioni di gravità, è necessario rimuovere sistematicamente gli effetti prevedibili e introdurre correzioni per gli effetti geometrici. Il procedimento standard prevede una sequenza di correzioni che trasformano la gravità osservata in un'anomalia di gravità che può essere interpretata in termini di variazioni di densità sotterranee.

La prima correzione fondamentale è la correzione di latitudine, che tiene conto della variazione sistematica della gravità normale con la latitudine geodetica. Come abbiamo visto, la gravità sull'ellissoide di riferimento varia da 9,7803 m/s² all'equatore a 9,8322 m/s² ai poli secondo la formula di Somigliana. Questa variazione deve essere sottratta dalle osservazioni per isolare le anomalie dovute a irregolarità locali.

La seconda correzione essenziale è la correzione di altitudine o correzione in aria libera (free-air correction). Questa correzione tiene conto del fatto che la gravità decresce con l'altezza secondo la legge dell'inverso del quadrato della distanza. Per piccole variazioni di altezza h rispetto alla superficie dell'ellissoide, la correzione in aria libera può essere approssimata linearmente come δg_FA ≈ -0,3086 h mGal/metro, dove il milligal (mGal) è un'unità di accelerazione pari a 10^{-5} m/s². Questa correzione è negativa perché la gravità diminuisce con l'altezza: a cento metri di altitudine, la gravità è circa 0,031 m/s² (31 mGal) minore che al livello del mare.

L'anomalia in aria libera, denotata Δg_FA, è definita come la differenza tra la gravità osservata (corretta per latitudine e portata al livello del geoide mediante la correzione in aria libera) e la gravità normale sull'ellissoide alla stessa latitudine. Matematicamente, Δg_FA = g_obs - γ + δg_FA, dove γ è la gravità normale alla latitudine del punto di osservazione. L'anomalia in aria libera rappresenta la deviazione della gravità dal valore normale dopo aver tenuto conto solo degli effetti geometrici di latitudine e altezza, ma senza correggere per la massa topografica tra il punto di osservazione e il geoide.

# La Correzione di Bouguer e l'Anomalia di Bouguer

La correzione di Bouguer rappresenta uno dei concetti più importanti e sottili della gravimetria geodetica e geofisica. Questa correzione, introdotta originariamente dal geodeta francese Pierre Bouguer nel diciottesimo secolo durante le sue celebri spedizioni in Sud America per misurare la forma della Terra, tiene conto dell'attrazione gravitazionale esercitata dalle masse topografiche situate tra il punto di osservazione e la superficie di riferimento (tipicamente il geoide o l'ellissoide).

Per comprendere la necessità e il significato della correzione di Bouguer, consideriamo un punto di osservazione situato a una certa altezza h sopra il livello del mare. La gravità misurata in questo punto è influenzata non solo dalla massa della Terra situata sotto il livello del mare, ma anche dalle masse rocciose che si trovano tra il livello del mare e il punto di osservazione. Se vogliamo confrontare le osservazioni di gravità effettuate a diverse altitudini per dedurre informazioni sulla struttura profonda della Terra, dobbiamo rimuovere l'effetto variabile della topografia.

Il modello più semplice per la correzione di Bouguer consiste nell'approssimare la massa topografica con una lastra infinita di spessore h e densità ρ. L'attrazione gravitazionale di una tale lastra infinita su un punto situato sulla sua superficie superiore può essere calcolata mediante integrazione diretta e risulta essere esattamente g_lastra = 2πGρh, dove G è la costante gravitazionale universale. Questa formula notevolmente semplice (indipendente dalla distanza dalla lastra, un risultato sorprendente della geometria infinita) fornisce la base per la correzione di Bouguer semplice.

Sostituendo i valori numerici standard, con G = 6,674 × 10^{-11} m³/(kg·s²) e assumendo una densità tipica della crosta terrestre ρ = 2.670 kg/m³, otteniamo g_lastra ≈ 0,1119 h mGal/metro. La correzione di Bouguer δg_B = -2πGρh è quindi negativa, perché stiamo rimuovendo l'effetto della massa attrattiva che si trova sopra il livello di riferimento. Per un punto a mille metri di altitudine, la correzione di Bouguer è circa -112 mGal, un valore sostanziale che dimostra l'importanza di questa correzione.

È istruttivo confrontare le magnitudini relative della correzione in aria libera e della correzione di Bouguer. La correzione in aria libera a mille metri è circa +309 mGal (positiva, perché compensa la diminuzione di gravità con l'altezza), mentre la correzione di Bouguer è circa -112 mGal (negativa, perché rimuove l'attrazione della topografia). La correzione netta è quindi circa +197 mGal. Le due correzioni hanno segni opposti e si compensano parzialmente, ma non completamente: l'effetto netto della correzione in aria libera domina, riflettendo il fatto che l'allontanamento dal centro di massa della Terra ha un effetto più grande dell'attrazione della lastra topografica intermedia.

L'anomalia di Bouguer, denotata Δg_B, è definita come l'anomalia in aria libera meno la correzione di Bouguer: Δg_B = Δg_FA - δg_B = g_obs - γ + δg_FA + 2πGρh. Questa anomalia rappresenta la deviazione della gravità dal valore normale dopo aver corretto per latitudine, altezza e massa topografica intermedia. L'anomalia di Bouguer è la quantità fondamentale utilizzata in prospezione geofisica per studiare variazioni di densità nella crosta terrestre, poiché riflette principalmente le anomalie di densità situate sotto la superficie topografica.

Tuttavia, il modello di lastra infinita utilizzato nella correzione di Bouguer semplice è evidentemente un'approssimazione. In realtà, la topografia terrestre non è una lastra infinita piatta ma presenta variazioni complesse: valli, montagne, canyon, pianure. Per misurazioni gravimetriche di alta precisione, particolarmente in regioni montuose, è necessario calcolare l'effetto gravitazionale della topografia reale, non di una lastra idealizzata.

La correzione topografica o correzione del terreno tiene conto della forma effettiva della topografia circostante il punto di osservazione. Questa correzione è sempre positiva (o nulla) perché la topografia reale comporta sempre una massa minore rispetto al modello di lastra infinita: le valli rappresentano masse mancanti che riducono l'attrazione gravitazionale, mentre le montagne, sebbene aggiungano massa, si trovano a distanze finite e la loro attrazione è diretta obliquamente, con componenti verticali inferiori a quelle di una lastra equivalente.

Il calcolo della correzione topografica richiede una conoscenza dettagliata della topografia circostante, tipicamente fornita da modelli digitali di elevazione (DEM, Digital Elevation Models). La regione attorno al punto di osservazione viene divisa in settori e zone concentriche, e per ciascuna zona si calcola l'effetto gravitazionale della deviazione topografica dal modello di lastra. Questo calcolo può essere computazionalmente intensivo, specialmente in terreni molto irregolari, ma è essenziale per ottenere anomalie di Bouguer accurate in regioni montuose.

L'anomalia di Bouguer completa, che include la correzione topografica δg_T, è quindi Δg_B^{completa} = g_obs - γ + δg_FA + 2πGρh + δg_T. Questa è la quantità che viene tipicamente utilizzata negli studi geodetici e geofisici di precisione, poiché rappresenta la

deviazione della gravità dal modello normale dopo aver rimosso tutti gli effetti geometrici e topografici prevedibili.

## Interpretazione Fisica e Geologica delle Anomalie di Bouguer

Le anomalie di Bouguer contengono informazioni ricche e complesse sulla struttura della crosta e del mantello superiore terrestre. L'interpretazione di queste anomalie richiede una comprensione della geologia, della petrologia e della geofisica, poiché le variazioni di densità che producono le anomalie possono avere origini molto diverse.

Anomalie di Bouguer negative, dove la gravità osservata è inferiore al valore normale anche dopo tutte le correzioni, indicano generalmente un deficit di massa sotto la superficie. Questo può essere causato da diversi meccanismi geologici. Nelle regioni continentali, anomalie negative pronunciate sono tipicamente associate a radici crostali profonde sotto le catene montuose. Secondo il principio dell'isostasia, sviluppato da George Airy nel diciannovesimo secolo, le montagne devono essere compensate da radici di crosta leggera che si estendono nel mantello più denso sottostante, analogamente a come gli iceberg galleggiano con la maggior parte del loro volume sommerso.

# Geoide e Ondulazioni Geoidali - Parte IV

## La Formula di Stokes: Fondamento Matematico della Determinazione Gravimetrica del Geoide

La formula di Stokes, pubblicata dal matematico e fisico britannico George Gabriel Stokes nel 1849, rappresenta uno dei risultati più eleganti e fondamentali della geodesia fisica teorica. Questa formula fornisce una soluzione esplicita al problema della determinazione del geoide a partire da misurazioni della gravità sulla superficie terrestre, esprimendo l'ondulazione geoidale in un punto come un'integrale delle anomalie di gravità esteso a tutta la superficie terrestre.

Prima di derivare la formula di Stokes, è necessario stabilire il quadro teorico in cui essa opera. Il problema fondamentale può essere formulato come segue: data la distribuzione delle anomalie di gravità sulla superficie terrestre (o su una superficie di riferimento vicina), determinare la forma del geoide, ovvero calcolare l'ondulazione geoidale N in ogni punto. Questo è un problema di teoria del potenziale, poiché sia la gravità sia il geoide sono legati al potenziale gravitazionale attraverso relazioni differenziali e integrali.

Il potenziale perturbante T è definito come la differenza tra il potenziale gravitazionale reale W e il potenziale normale U dell'ellissoide di riferimento: T = W - U. Questo potenziale perturbante è una quantità piccola (dell'ordine di qualche decina di metri quadrati al secondo quadrato in unità SI) che cattura le deviazioni del campo gravitazionale reale rispetto al

campo normale. Il potenziale perturbante soddisfa l'equazione di Laplace $\nabla^2 T = 0$ nello spazio esterno alla Terra, poiché entrambi W e U sono potenziali armonici in quella regione.

L'ondulazione geoidale N è legata al potenziale perturbante sulla superficie del geoide dalla relazione di Bruns: $N = T/\gamma$, dove $\gamma$ è la gravità normale. Questa formula notevolmente semplice, derivata dal geodeta svizzero Ernst Heinrich Bruns nel 1878, stabilisce una connessione diretta tra la quantità geometrica N (l'ondulazione) e la quantità fisica T (il potenziale perturbante). La semplicità di questa relazione è ingannevole, poiché nasconde la complessità del calcolo del potenziale perturbante dalle misurazioni gravimetriche.

La derivata radiale del potenziale perturbante è legata all'anomalia di gravità. Più precisamente, se $\delta g$ rappresenta l'anomalia di gravità (che può essere l'anomalia in aria libera o l'anomalia di Bouguer, a seconda del contesto), allora $-\partial T/\partial r \approx \delta g$, dove r è la distanza dal centro della Terra. Questa relazione differenziale collega il potenziale (che determina il geoide) alla quantità osservabile (l'anomalia di gravità).

Stokes affrontò il problema inverso: data la distribuzione di $\delta g$ sulla superficie terrestre, trovare T e quindi N. La soluzione richiede di risolvere l'equazione di Laplace per T con condizioni al contorno derivate dalle anomalie di gravità osservate. Stokes dimostrò che, sotto certe ipotesi semplificatrici (principalmente che le masse anomale siano confinate all'interno della superficie di riferimento), il problema ammette una soluzione integrale esplicita.

La formula di Stokes nella sua forma classica esprime l'ondulazione geoidale in un punto P come $N(P) = (R/4\pi\gamma) \iint_\sigma \Delta g(Q)\, S(\psi)\, d\sigma$, dove l'integrale doppio si estende su tutta la sfera terrestre $\sigma$, R è il raggio medio terrestre, $\gamma$ è la gravità normale media, $\Delta g(Q)$ è l'anomalia di gravità nel punto Q, $\psi$ è la distanza angolare tra i punti P e Q (misurata dal centro della Terra), e $S(\psi)$ è la funzione di Stokes, definita da $S(\psi) = 1/\sin(\psi/2) - 6\sin(\psi/2) + 1 - 5\cos(\psi) - 3\cos(\psi)\ln[\sin(\psi/2) + \sin^2(\psi/2)]$.

La funzione di Stokes $S(\psi)$ è una funzione del solo angolo di distanza $\psi$ e ha proprietà matematiche interessanti. Per piccoli angoli ($\psi \to 0$), la funzione diverge come $2/\psi$, riflettendo il fatto che le anomalie di gravità nelle immediate vicinanze del punto di calcolo hanno un peso dominante nella determinazione dell'ondulazione locale. Per angoli grandi ($\psi \to \pi$), la funzione tende asintoticamente a zero, indicando che anomalie molto distanti contribuiscono sempre meno all'ondulazione locale.

Questa struttura matematica della formula di Stokes ha importanti implicazioni pratiche. Il contributo principale all'integrale proviene dalle anomalie di gravità entro qualche centinaio di chilometri dal punto di interesse, mentre contributi da distanze maggiori sono progressivamente attenuati. Questo permette, in pratica, di troncare l'integrazione a una distanza finita (tipicamente un raggio di qualche migliaio di chilometri) senza perdere troppa accuratezza, sebbene sia necessario applicare correzioni per tenere conto delle anomalie troncate.

La derivazione rigorosa della formula di Stokes procede attraverso l'espansione in armoniche sferiche sia del potenziale perturbante sia dell'anomalia di gravità. Se espandiamo T in armoniche sferiche come $T(r, \theta, \lambda) = \Sigma_{n=0}^{\infty} \Sigma_{m=0}^{n} (a/r)^{n+1} [A_{nm} \cos(m\lambda) + B_{nm} \sin(m\lambda)] P_{nm}(\cos \theta)$, e similmente espandiamo $\delta g$, allora i

coefficienti delle due espansioni sono collegati da relazioni algebriche. Invertendo queste relazioni e passando dalla rappresentazione armonica alla rappresentazione integrale, si ottiene la formula di Stokes.

Una forma alternativa della formula di Stokes, particolarmente utile per calcoli numerici, utilizza coordinate geocentriche sferiche ed esprime l'integrale in termini di latitudine e longitudine: $N(\varphi, \lambda) = (R/4\pi\gamma) \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Delta g(\varphi', \lambda') S(\psi) \cos(\varphi') d\varphi' d\lambda'$, dove $\varphi$ e $\lambda$ sono le coordinate del punto di calcolo, $\varphi'$ e $\lambda'$ sono le coordinate del punto di integrazione, e $\psi$ è calcolato dalla formula della distanza angolare sulla sfera: $\cos(\psi) = \sin(\varphi)\sin(\varphi') + \cos(\varphi)\cos(\varphi')\cos(\lambda - \lambda')$.

Nella pratica moderna del calcolo geoidale, la formula di Stokes è spesso implementata in una forma modificata o kernel-modificata per migliorare la convergenza dell'integrale e ridurre gli errori dovuti al troncamento. Inoltre, la formula di Stokes classica assume che le masse anomale siano contenute all'interno della superficie di riferimento (tipicamente l'ellissoide), il che non è vero per le montagne e le masse topografiche che si estendono al di sopra. Questo richiede l'applicazione di correzioni topografiche al calcolo geoidale, analoghe ma più complesse delle correzioni topografiche applicate alle anomalie di gravità.

# Implementazione Pratica della Formula di Stokes

L'applicazione pratica della formula di Stokes per calcolare modelli geoidali regionali o globali richiede la soluzione di numerose sfide computazionali e metodologiche. La prima difficoltà evidente è che l'integrale di Stokes si estende formalmente su tutta la superficie terrestre, mentre le misurazioni gravimetriche sono disponibili solo in punti discreti e con copertura geografica molto disomogenea.

La copertura di dati gravimetrici terrestri è estremamente variabile. Nei paesi sviluppati, particolarmente in Europa, Nord America e parti dell'Asia, esistono reti dense di stazioni gravimetriche con spaziature dell'ordine di alcuni chilometri o meno. In regioni remote, desertiche, montuose o coperte da ghiacci, le misurazioni sono scarse o assenti. Sugli oceani, che coprono circa il settanta % della superficie terrestre, i dati gravimetrici diretti da navi sono limitati principalmente alle rotte di navigazione e sono molto più sparsi rispetto ai dati terrestri.

Questa disomogeneità nella copertura dei dati richiede tecniche di interpolazione e predizione per stimare le anomalie di gravità in regioni prive di osservazioni. Metodi geostatistici come il kriging, che utilizzano la struttura di correlazione spaziale delle anomalie di gravità, sono comunemente impiegati per questo scopo. Negli oceani, l'altimetria satellitare ha rivoluzionato la situazione fornendo copertura quasi globale: misurazioni precise dell'altezza della superficie oceanica rispetto a un ellissoide di riferimento permettono di dedurre l'ondulazione geoidale oceanica e, da questa, le anomalie di gravità mediante derivazione.

Una volta che si dispone di una griglia di anomalie di gravità che copre la regione di interesse (e idealmente si estende significativamente oltre per minimizzare errori di troncamento), l'integrale di Stokes può essere valutato numericamente. Il metodo più diretto consiste nel discretizzare l'integrale come una somma su celle elementari: $N(P) \approx (R/4\pi\gamma)$

$\Sigma_i \Delta g_i S(\psi_i) \Delta\sigma_i$, dove la somma si estende su tutte le celle i, $\Delta g_i$ è l'anomalia di gravità nella cella i-esima, $\psi_i$ è la distanza angolare dal punto P al centro della cella i, e $\Delta\sigma_i$ è l'elemento di area della cella i sulla sfera.

La scelta della dimensione delle celle rappresenta un compromesso tra accuratezza e efficienza computazionale. Celle troppo grandi introducono errori di discretizzazione significativi, particolarmente nelle vicinanze del punto di calcolo dove la funzione di Stokes varia rapidamente. Celle troppo piccole aumentano enormemente il costo computazionale. In pratica, si utilizzano spesso griglie a risoluzione variabile, con celle piccole (dell'ordine di qualche minuto d'arco, circa due-cinque chilometri) nelle vicinanze del punto di calcolo e celle progressivamente più grandi a distanze maggiori.

La singolarità della funzione di Stokes per $\psi = 0$ richiede un trattamento speciale. Quando il punto di calcolo P coincide con (o è molto vicino a) un punto di integrazione Q, la funzione $S(\psi)$ diventa molto grande. Questo problema è risolto mediante tecniche di regolarizzazione: la cella contenente il punto di calcolo è trattata separatamente, spesso suddividendola in sottocelle più fini e utilizzando approssimazioni analitiche per l'integrale nelle immediate vicinanze della singolarità.

# Geoide e Ondulazioni Geoidali - Parte V

## Modelli Geoidali Globali e Regionali: EGM2008 e Altri Standard

La culminazione di decenni di lavoro geodetico nella determinazione del geoide è rappresentata dai modelli geoidali globali ad alta risoluzione che sono stati sviluppati combinando dati gravimetrici terrestri, altimetria satellitare, e osservazioni da satelliti dedicati alla gravimetria. Questi modelli forniscono valori dell'ondulazione geoidale su griglie regolari che coprono l'intero globo, permettendo la conversione tra altezze ellissoidiche e altezze ortometriche con precisione senza precedenti.

Il modello Earth Gravitational Model 2008, universalmente noto come EGM2008, rappresenta uno degli standard più utilizzati e accurati per il campo gravitazionale globale e il geoide. Questo modello fu sviluppato dal National Geospatial-Intelligence Agency degli Stati Uniti in collaborazione con numerose istituzioni internazionali e pubblicato nel 2008. EGM2008 è completo fino al grado e ordine 2159 nello sviluppo in armoniche sferiche, con contenuto addizionale fino al grado 2190 per alcuni coefficienti. Questa risoluzione corrisponde a una lunghezza d'onda minima di circa nove chilometri, permettendo di catturare caratteristiche geodetiche molto dettagliate.

La costruzione di EGM2008 ha richiesto l'integrazione di dati provenienti da molteplici fonti. La componente a lunga lunghezza d'onda del modello (gradi armonici bassi, tipicamente fino a circa 180) è determinata principalmente da dati satellitari, in particolare dalle missioni GRACE (Gravity Recovery and Climate Experiment) che hanno rivoluzionato la nostra conoscenza del campo gravitazionale su scala globale. GRACE utilizzava due satelliti che

orbitavano in formazione, misurando con precisione micrometrica le variazioni nella loro separazione causate dalle anomalie gravitazionali sotto di essi.

Le componenti a lunghezze d'onda più corte di EGM2008 sono state determinate integrando milioni di misurazioni gravimetriche terrestri, marine e aeree. Il database utilizzato includeva circa cinque milioni di misurazioni terrestri di gravità, quasi tre milioni di misurazioni da altimetria satellitare sugli oceani, e dati gravimetrici aerotrasportati su vaste regioni polari. Questa integrazione massiva di dati eterogenei ha richiesto sofisticate tecniche di elaborazione, inclusa la standardizzazione delle diverse convenzioni e datum utilizzati nelle varie collezioni di dati, la rimozione di errori sistematici, e la combinazione ottimale di osservazioni con diversi livelli di accuratezza.

L'accuratezza di EGM2008 varia geograficamente a seconda della qualità e densità dei dati di input. Nelle regioni ben coperte da misurazioni gravimetriche dense, l'incertezza nell'ondulazione geoidale è tipicamente di pochi centimetri. In regioni con copertura di dati scarsa, come parti dell'Africa centrale, dell'Amazzonia, o delle calotte polari, l'incertezza può raggiungere diversi decimetri. A livello globale, l'accuratezza media di EGM2008 è stimata essere dell'ordine di quindici-trenta centimetri, un risultato notevole considerando la complessità del problema.

Oltre ai modelli globali come EGM2008, esistono numerosi modelli geoidali regionali sviluppati da agenzie geodetiche nazionali per i loro territori specifici. Questi modelli regionali spesso raggiungono accuratezze superiori ai modelli globali perché possono utilizzare dati locali di qualità superiore e densità maggiore, e possono essere ottimizzati per le caratteristiche geologiche e topografiche specifiche della regione. Esempi includono il modello USGG2012 per gli Stati Uniti continentali, il modello CGG2013 per il Canada, il modello AUSGeoid per l'Australia, e vari modelli nazionali europei.

In Europa, il progetto European Gravimetric Quasigeoid (EGG) ha prodotto modelli quasigeoidali ad alta risoluzione che coprono il continente europeo. Il quasigeoide è una superficie leggermente diversa dal geoide, definita in modo tale che le altezze normali (piuttosto che ortometriche) siano direttamente ottenibili sottraendo l'altezza quasigeoidale dall'altezza ellissoidica. Questa distinzione tecnica è importante in regioni montuose dove la differenza tra geoide e quasigeoide può raggiungere alcuni centimetri.

La missione satellitare GOCE (Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer), lanciata dall'Agenzia Spaziale Europea nel 2009 e operativa fino al 2013, ha rappresentato un salto qualitativo nella determinazione del campo gravitazionale su scala intermedia. GOCE utilizzava un gradiometro gravitazionale a sei componenti che misurava direttamente il gradiente del campo gravitazionale, fornendo informazioni complementari alle misurazioni di GRACE. I dati di GOCE hanno permesso di migliorare significativamente la conoscenza del geoide su lunghezze d'onda di circa ottanta-centocinquanta chilometri, colmando il gap tra le osservazioni satellitari a lunga lunghezza d'onda e le misurazioni terrestri ad alta risoluzione.

# Discrepanze tra Geoide ed Ellissoide GRS80: Analisi Quantitativa e Distribuzione Geografica

Le discrepanze tra il geoide e l'ellissoide di riferimento GRS80, manifestate attraverso le ondulazioni geoidali, rivelano una geografia complessa che riflette la struttura tridimensionale della Terra. L'analisi quantitativa di queste discrepanze fornisce informazioni preziose non solo per applicazioni geodetiche pratiche ma anche per la comprensione della dinamica interna del pianeta.

Come già menzionato, le ondulazioni geoidali globali variano approssimativamente tra -106 metri (nell'Oceano Indiano meridionale) e +85 metri (nella regione indonesiana del Pacifico occidentale). Questo range di quasi duecento metri rappresenta una deviazione significativa dall'ellissoide di riferimento e dimostra quanto il campo gravitazionale reale della Terra si discosti dal modello idealizzato di un ellissoide idrostatico in rotazione.

La distribuzione geografica delle ondulazioni geoidali mostra pattern su molteplici scale spaziali. A scala globale, si osserva una correlazione approssimativa con le grandi province tettoniche. Le regioni oceaniche tendenzialmente mostrano ondulazioni negative o moderatamente positive, mentre le regioni continentali, particolarmente quelle caratterizzate da crosta spessa e orogenesi recente, tendono a mostrare ondulazioni positive. Tuttavia, questa correlazione è solo approssimativa e ci sono numerose eccezioni significative.

Nell'Oceano Pacifico, le ondulazioni geoidali variano tipicamente tra -40 e +30 metri, con gradienti particolarmente forti associati alle fosse oceaniche profonde (come la Fossa delle Marianne, la Fossa del Tonga, e la Fossa del Perù-Cile) dove la subduzione di litosfera fredda e densa produce anomalie di gravità negative pronunciate. La dorsale medio-oceanica del Pacifico orientale, dove si genera nuova crosta oceanica calda e leggera, mostra invece ondulazioni geoidali leggermente positive.

L'Oceano Atlantico presenta un pattern diverso, con ondulazioni generalmente positive nella parte settentrionale (fino a +40 metri nell'Atlantico settentrionale) e valori vicini allo zero o leggermente negativi nell'Atlantico meridionale. Questo pattern è correlato con la storia geologica dell'apertura atlantica e la distribuzione di anomalie termiche nel mantello sottostante.

Il rigonfiamento geoidale nella regione Indonesia-Pacifico occidentale, con valori che raggiungono +85 metri, è associato a una combinazione complessa di fattori. Questa regione è caratterizzata da intensa attività tettonica con la convergenza di molteplici placche (placca del Pacifico, placca Australiana, placca Eurasiatica, placca Filippina), formazione di archi vulcanici, e bacini di retroarco. Studi geofisici suggeriscono che il rigonfiamento sia causato da anomalie positive di temperatura nel mantello superiore, possibilmente associate a plume mantellici o a upwelling indotto dalla configurazione particolare delle zone di subduzione circostanti.

La depressione geoidale dell'Oceano Indiano meridionale, con valori che raggiungono -106 metri, è stata oggetto di particolare interesse scientifico. Questa vasta anomalia negativa, che si estende per migliaia di chilometri a sud-ovest dell'India, è stata denominata "Indian Ocean Geoid Low" o IOGL. Ricerche recenti, basate su modellazione numerica della convezione mantellica e tomografia sismica, suggeriscono che l'IOGL sia causata dalla presenza di materiale denso nel mantello medio e inferiore, residuo di antichi episodi di subduzione, combinato con una distribuzione particolare delle correnti di convezione mantellica nella regione.

Sulle masse continentali, le ondulazioni geoidali mostrano una correlazione complessa con la topografia e la geologia. Le catene montuose giovani e alte, come l'Himalaya, le Ande e le Alpi, generalmente mostrano ondulazioni positive (tipicamente +30 a +60 metri), riflettendo le radici crostali profonde associate a queste strutture orogenetiche. Tuttavia, la correlazione non è semplice: non tutte le regioni montuose mostrano ondulazioni positive, e alcune pianure mostrano ondulazioni significative.

# Geoide e Ondulazioni Geoidali - Parte VI

## Interpretazione Fisica delle Ondulazioni Geoidali: Dalla Crosta al Mantello Profondo

Le ondulazioni geoidali rappresentano la manifestazione in superficie di processi e strutture che si estendono attraverso tutto lo spessore della litosfera terrestre e nel mantello sottostante. L'interpretazione fisica di queste ondulazioni richiede la comprensione di come variazioni di densità a diverse profondità contribuiscano al campo gravitazionale osservato e alla forma del geoide.

La relazione fondamentale tra distribuzione di densità e ondulazione geoidale può essere compresa attraverso il principio di sovrapposizione. Ogni anomalia di densità $\Delta\rho$ in un volume elementare $\Delta V$ situato a una certa profondità sotto la superficie contribuisce al potenziale perturbante e quindi all'ondulazione geoidale in superficie. Il contributo di un elemento di massa anomala decresce con la distanza secondo una legge che dipende dalla geometria della distribuzione di massa e dalla profondità.

Per una sfera di densità anomala $\Delta\rho$ e raggio $a$ situata a profondità $d$ sotto la superficie, l'anomalia di Bouguer in superficie direttamente sopra la sfera è approssimativamente $\Delta g \approx (4/3)\pi G\Delta\rho a^3/d^2$, mentre l'ondulazione geoidale è approssimativamente $N \approx (4/3)\pi G\Delta\rho a^3/(\gamma d)$, dove $\gamma$ è la gravità normale. Queste formule mostrano che l'anomalia di gravità decresce come $1/d^2$ mentre l'ondulazione geoidale decresce solo come $1/d$. Questo significa che il geoide è più sensibile alle strutture profonde rispetto alle anomalie di gravità, una proprietà che rende lo studio del geoide particolarmente utile per investigare la struttura del mantello.

Nella crosta terrestre, le principali fonti di anomalie di densità sono variazioni nella composizione litologica, nella porosità, nella temperatura, e nello spessore crostale. Le rocce sedimentarie hanno tipicamente densità minori (circa 2.300-2.600 kg/m³) rispetto alle rocce metamorfiche e ignee (2.600-3.000 kg/m³). La crosta continentale, composta principalmente da rocce granitiche e gneissiche, ha una densità media di circa 2.800 kg/m³, mentre la crosta oceanica basaltica ha densità di circa 2.900 kg/m³. Queste differenze composizionali producono anomalie di gravità e contributi all'ondulazione geoidale.

Lo spessore crostale varia significativamente a livello globale, da circa sei-sette chilometri sotto le dorsali medio-oceaniche a settanta-ottanta chilometri sotto le maggiori catene

montuose come l'Himalaya e il Tibet. Secondo il principio dell'isostasia di Airy, regioni con topografia elevata sono compensate da radici crostali che si estendono nel mantello sottostante. Poiché la crosta ha densità minore del mantello (circa 2.800 kg/m³ contro 3.300 kg/m³), queste radici rappresentano deficit di massa che producono anomalie di gravità negative e contribuiscono negativamente all'ondulazione geoidale locale.

Tuttavia, l'isostasia non è mai perfetta, e l'esistenza di anomalie residue dopo la rimozione dell'effetto isostatico indica deviazioni dal modello di compensazione ideale. Queste anomalie residue possono essere causate da processi dinamici nel mantello, da variazioni laterali nella struttura termica, o da supporto elastico della litosfera che permette di sostenere carichi topografici parzialmente non compensati.

Nel mantello superiore, le principali fonti di anomalie di densità sono variazioni di temperatura e composizione. Il mantello è in uno stato di convezione vigorosa, con correnti ascendenti di materiale caldo e meno denso e correnti discendenti di materiale freddo e denso. Queste correnti convettive producono anomalie termiche che si traducono in anomalie di densità secondo il coefficiente di espansione termica del materiale mantellico. Una variazione di temperatura di cento gradi Celsius nel mantello superiore produce una variazione di densità di circa uno-due %, corrispondente a circa trenta-sessanta kg/m³.

Le zone di subduzione, dove litosfera oceanica fredda e densa scende nel mantello, rappresentano alcune delle più forti anomalie di densità positive nel mantello terrestre. Le lastre subdotte possono penetrare attraverso il mantello superiore (fino a 660 chilometri di profondità) e, in molti casi, continuare nel mantello inferiore. Queste lastre fredde e dense producono anomalie di gravità negative in superficie (perché si trovano sotto la superficie) ma contribuiscono a depressioni geoidali regionali. La geometria tridimensionale complessa delle zone di subduzione, rivelata dalla tomografia sismica, mostra lastre che si piegano, si accumulano alla transizione mantello superiore-inferiore, o penetrano profondamente nel mantello inferiore, ciascuna con la propria firma gravitazionale.

Le regioni di upwelling mantellico, dove materiale caldo sale dalle profondità, producono l'effetto opposto. I plume mantellici, colonne strette di materiale anomalamente caldo che si ritiene risalgano dal confine nucleo-mantello, producono rigonfiamenti topografici (come le isole Hawaii o l'Iceland) e ondulazioni geoidali positive. Tuttavia, l'ampiezza dell'ondulazione geoidale associata a un plume dipende criticamente dalla sua distribuzione verticale di temperatura e dalla sua larghezza, rendendo l'interpretazione delle anomalie geoidali in termini di struttura dei plume un problema inverso complesso e non univoco.

Il mantello inferiore, che si estende da 660 a 2.900 chilometri di profondità, contribuisce significativamente al campo gravitazionale di lunghezza d'onda molto lunga. Studi tomografici sismici rivelano anomalie di velocità sismica su larga scala nel mantello inferiore, interpretate come anomalie termiche e possibilmente composizionali. Due grandi province di bassa velocità sismica (Large Low Shear Velocity Provinces, LLSVP) sono state identificate sotto l'Africa e il Pacifico, estendendosi per migliaia di chilometri lateralmente e per circa mille chilometri verticalmente sopra il confine nucleo-mantello. Queste province mostrano correlazioni con ondulazioni geoidali positive di lunghezza d'onda molto lunga, sebbene la relazione sia complessa e ancora oggetto di ricerca attiva.

# Applicazioni Pratiche delle Ondulazioni Geoidali

La conoscenza accurata delle ondulazioni geoidali ha numerose applicazioni pratiche in geodesia, ingegneria, oceanografia e scienze della Terra. Queste applicazioni spaziano da compiti quotidiani di rilevamento topografico a studi scientifici avanzati della dinamica oceanica e della struttura interna della Terra.

L'applicazione più diretta e probabilmente più importante delle ondulazioni geoidali è nella conversione tra altezze ellissoidiche e altezze ortometriche. I moderni sistemi di posizionamento satellitare come GPS, GLONASS, Galileo e BeiDou forniscono coordinate tridimensionali dei punti sulla superficie terrestre, inclusa l'altezza ellissoidica h rispetto a un ellissoide di riferimento (tipicamente WGS84 per il GPS, che è praticamente identico al GRS80). Tuttavia, per la maggior parte delle applicazioni pratiche in topografia, ingegneria civile, cartografia e pianificazione, ciò che è richiesto è l'altezza ortometrica H, ovvero l'elevazione sopra il livello medio del mare.

La relazione h = H + N permette questa conversione, ma richiede la conoscenza dell'ondulazione geoidale N nel punto di interesse. Prima della disponibilità di modelli geoidali accurati, questa conversione era problematica e richiedeva livellazioni geometriche dispendiose per connettere i punti GPS a capisaldi di quota nota. Con i moderni modelli geoidali come EGM2008 o modelli regionali specifici, la conversione può essere effettuata immediatamente con accuratezze tipicamente del centimetro in regioni ben modellate.

Questa capacità ha rivoluzionato la pratica del rilevamento topografico. Un operatore con un ricevitore GPS può ora determinare rapidamente l'elevazione di punti sul terreno senza necessità di collegamenti laboriosi a reti di livellazione esistenti. Questo è particolarmente vantaggioso in regioni remote o difficili da accedere dove le reti di livellazione sono scarse o assenti. L'accuratezza centimetrica raggiunta dai moderni ricevitori GPS differenziali, combinata con modelli geoidali accurati, permette di ottenere altezze ortometriche con precisioni comparabili a quelle della livellazione geometrica tradizionale ma con sforzo e tempo drasticamente ridotti.

In oceanografia fisica, il geoide serve come superficie di riferimento fondamentale per lo studio della topografia dinamica degli oceani. La superficie degli oceani non coincide esattamente con il geoide a causa di effetti dinamici: correnti oceaniche, variazioni di densità dell'acqua marina, effetti atmosferici e maree producono deviazioni dalla superficie equipotenziale. Queste deviazioni, chiamate topografia dinamica oceanica, sono tipicamente dell'ordine di uno-due metri ma contengono informazioni cruciali sulla circolazione oceanica.

L'altimetria satellitare misura l'altezza della superficie oceanica rispetto all'ellissoide di riferimento con precisione centimetrica. Sottraendo l'ondulazione geoidale da questa altezza, si ottiene la topografia dinamica: h_{oceano} - N = η, dove η è la topografia dinamica. Lo studio di η e delle sue variazioni temporali permette di monitorare correnti oceaniche, identificare vortici, studiare il trasporto di calore negli oceani, e comprendere il ruolo degli oceani nel sistema climatico globale.

# Geoide e Ondulazioni Geoidali - Parte VII (Conclusione)

## Sviluppi Futuri e Frontiere della Ricerca Geodetica

La determinazione del geoide e lo studio delle ondulazioni geoidali continuano a essere aree di ricerca attiva e in rapida evoluzione, spinte dai progressi nelle tecnologie di misurazione, nelle capacità computazionali e nella comprensione teorica. Diverse direzioni di sviluppo futuro promettono di migliorare ulteriormente la nostra conoscenza della forma della Terra e del suo campo gravitazionale.

Una frontiera importante riguarda il miglioramento della risoluzione spaziale dei modelli geoidali. Mentre i modelli globali attuali come EGM2008 raggiungono risoluzioni di circa nove chilometri, c'è un crescente interesse per modelli ancora più dettagliati che possano catturare variazioni geoidali su scale di pochi chilometri o meno. Questo richiede l'integrazione di misurazioni gravimetriche terrestri sempre più dense, gravimetria aerotrasportata sistematica, e tecniche avanzate di modellazione del campo gravitazionale.

La missione satellitare GRACE Follow-On, lanciata nel 2018 come successore di GRACE, continua a fornire dati di altissima qualità sul campo gravitazionale globale e le sue variazioni temporali. Una innovazione significativa di GRACE-FO è l'utilizzo di un interferometro laser per misurare la separazione tra i due satelliti con precisione nanometrica, migliorando ulteriormente la sensibilità alle anomalie gravitazionali. I dati di GRACE-FO stanno permettendo di monitorare variazioni temporali del campo gravitazionale causate da redistribuzioni di massa associate a fenomeni climatici, idrologici e tettonici.

Le variazioni temporali del geoide rappresentano un campo emergente di grande interesse. Il campo gravitazionale terrestre non è statico ma cambia nel tempo a causa di numerosi processi: redistribuzione di masse d'acqua negli oceani e nei continenti (inclusi ghiacciai, calotte polari, acque sotterranee), movimenti post-glaciali (il lento recupero isostatico delle regioni precedentemente coperte da ghiacci durante l'ultima era glaciale), attività tettonica e vulcanica, e variazioni nella rotazione terrestre. Il monitoraggio continuo di queste variazioni attraverso missioni gravimetriche satellitari fornisce informazioni preziose su processi geodinamici e climatici.

Il recupero post-glaciale, in particolare, produce variazioni geoidali misurabili su scale temporali di decenni. In Fennoscandia (Scandinavia e Finlandia) e nel Canada settentrionale, regioni che erano coperte da spesse calotte glaciali durante l'ultima era glaciale, il mantello continua a risalire lentamente in risposta alla rimozione del carico glaciale, producendo un sollevamento della superficie di diversi millimetri all'anno e variazioni associate nel campo gravitazionale. Questi fenomeni sono osservati sia attraverso tecniche geodetiche tradizionali (livellazione ripetuta, GPS continuo) sia attraverso gravimetria satellitare.

Lo scioglimento accelerato delle calotte polari in Groenlandia e Antartide, associato al riscaldamento globale, produce anch'esso variazioni gravitazionali significative. La perdita di

massa glaciale riduce l'attrazione gravitazionale locale, causando un abbassamento relativo del geoide nelle regioni polari e una redistribuzione dell'acqua di fusione negli oceani globali. Il monitoraggio di queste variazioni attraverso GRACE e GRACE-FO fornisce stime indipendenti del bilancio di massa delle calotte polari, complementari ad altre tecniche di osservazione come l'altimetria radar e laser.

Un'area di ricerca teorica attiva riguarda il miglioramento delle metodologie per la determinazione geoidale. La formula di Stokes classica, sebbene matematicamente elegante, fa assunzioni semplificatrici (in particolare l'assenza di masse al di fuori della superficie di riferimento) che non sono esattamente soddisfatte nella realtà. Sono stati sviluppati numerosi approcci alternativi o modificati: metodi di rimozione-ripristino che separano il contributo delle masse topografiche, tecniche di kernel modificati che migliorano la convergenza degli integrali, metodi di collocazione per meno quadrati che utilizzano tecniche geostatistiche per la predizione ottimale del campo gravitazionale, e metodi basati su sintesi armonica che combinano modelli globali con dati locali.

L'integrazione sempre più stretta tra diversi tipi di dati geodetici rappresenta un'altra tendenza importante. I moderni approcci alla determinazione del geoide combinano misurazioni gravimetriche terrestri, dati di altimetria satellitare, osservazioni da satelliti gravimetrici dedicati, misurazioni GPS su capisaldi di quota nota, e informazioni topografiche dettagliate da modelli digitali di elevazione. Metodi di inversione e assimilazione dati sofisticati permettono di estrarre il massimo dell'informazione da questi dataset eterogenei, tenendo conto delle diverse accuratezze, risoluzioni spaziali e correlazioni di errore.

La teoria del campo gravitazionale si sta anche estendendo per tenere conto di effetti relativistici che diventano rilevanti alle precisioni estreme raggiungibili con le moderne tecnologie. La relatività generale predice che il tempo scorre a velocità diverse in punti con diverso potenziale gravitazionale, un effetto che è stato verificato sperimentalmente con orologi atomici. A livello di accuratezza centimetrica o millimetrica nel posizionamento geodetico e nella definizione di sistemi di riferimento, questi effetti relativistici devono essere considerati esplicitamente nelle formule e nei calcoli.

# Il Geoide nel Contesto della Geodesia Moderna e della Scienza del Sistema Terra

Il geoide e le ondulazioni geoidali occupano una posizione centrale nella moderna geodesia e nelle scienze del sistema Terra, fungendo da ponte tra diverse discipline e scale di fenomeni. La loro determinazione accurata richiede l'integrazione di fisica, matematica, geofisica, oceanografia e scienze dell'informazione, mentre le loro applicazioni spaziano da questioni pratiche immediate a problemi scientifici fondamentali sulla struttura e dinamica del nostro pianeta.

Dal punto di vista teorico, il geoide rappresenta una realizzazione fisica del concetto matematico di superficie equipotenziale. Questa connessione tra geometria e fisica, tra forma e forza, incarna uno degli aspetti più profondi della geodesia: il riconoscimento che la "forma" della Terra non può essere definita puramente in termini geometrici ma deve incorporare la fisica del campo gravitazionale. Il geoide è simultaneamente una superficie

geometrica (ha una forma specifica nello spazio) e una superficie fisica (è definita da una condizione sul potenziale gravitazionale), e questa dualità è essenziale per la sua utilità pratica e il suo significato concettuale.

L'evoluzione della nostra comprensione e determinazione del geoide riflette anche la storia più ampia dello sviluppo scientifico e tecnologico. Dalle prime speculazioni sulla forma della Terra nell'antica Grecia, attraverso le misurazioni dell'arco di meridiano del diciottesimo e diciannovesimo secolo, fino alle moderne missioni satellitari gravitazionali, ogni epoca ha contribuito con le proprie tecnologie e concetti. La formula di Stokes del 1849 rimane fondamentale oltre centocinquanta anni dopo, testimoniando la potenza dell'analisi matematica rigorosa. Al contempo, i satelliti GRACE e GOCE del ventunesimo secolo forniscono dati che Stokes non avrebbe potuto immaginare, dimostrando come il progresso tecnologico apra nuove frontiere osservative.

La discrepanza tra il geoide e l'ellissoide GRS80, manifestata attraverso ondulazioni che raggiungono quasi duecento metri da estremo a estremo, è una testimonianza drammatica della complessità della Terra reale rispetto ai modelli idealizzati. Queste ondulazioni non sono mere curiosità numeriche ma portano in sé informazioni sulla distribuzione tridimensionale di massa nella Terra, sulla dinamica della convezione mantellica, sulla storia tettonica e sulle variazioni composizionali che caratterizzano il nostro pianeta eterogeneo e dinamico.

L'integrazione del geoide con altre osservazioni geodetiche e geofisiche sta aprendo nuove possibilità per lo studio integrato del sistema Terra. La combinazione di gravimetria, sismologia, magnetotellurica e altre tecniche geofisiche in schemi di inversione congiunta permette di vincolare modelli della struttura interna della Terra con una risoluzione e confidenza impossibili utilizzando singole tecniche isolatamente. Il geoide fornisce vincoli sulla distribuzione integrata di densità che complementano le informazioni strutturali dalla sismologia e le proprietà elettromagnetiche dalla magnetotellurica.

Nel contesto del cambiamento climatico, il monitoraggio delle variazioni temporali del geoide e del campo gravitazionale sta emergendo come uno strumento critico per quantificare redistribuzioni di massa a scala globale. Lo scioglimento dei ghiacci polari, le variazioni nell'immagazzinamento di acqua continentale, i cambiamenti nella circolazione oceanica: tutti questi fenomeni lasciano firme gravitazionali che possono essere osservate e quantificate. La gravimetria satellitare fornisce una prospettiva globale integrata su questi processi che è difficile ottenere con reti di osservazione puntuali.

# Riflessioni Conclusive: La Terra tra Geometria e Fisica

Lo studio del geoide e delle ondulazioni geoidali illustra splendidamente come domande apparentemente semplici possano condurre a profondità concettuali e tecniche notevoli. La domanda "qual è la forma della Terra?" ammette risposte a molteplici livelli di sofisticazione: sfera, ellissoide, geoide, ciascuna appropriata per diversi contesti e accuratezze richieste. Il passaggio da una approssimazione alla successiva non invalida quella precedente ma la arricchisce e la contestualizza.

L'ellissoide GRS80, con i suoi parametri accuratamente determinati, fornisce un modello geometrico elegante e computazionalmente trattabile che cattura l'essenza della forma terrestre a grande scala. È uno strumento matematico ideale per i calcoli geodetici, per la definizione di sistemi di coordinate, e per la rappresentazione cartografica. La sua esistenza e utilità non sono diminuite dalla conoscenza del geoide; piuttosto, l'ellissoide serve come riferimento rispetto al quale le complessità del geoide possono essere espresse e comprese.

Il geoide, a sua volta, rappresenta la "vera" forma della Terra nel senso che cattura le irregolarità del campo gravitazionale reale causate dalla distribuzione effettiva di massa. È una superficie fisica, non puramente geometrica, definita da una condizione sul potenziale. La sua determinazione richiede misurazioni fisiche (gravità) e tecniche di soluzione di problemi al contorno per equazioni differenziali alle derivate parziali. Il geoide connette la geodesia con la geofisica, fornendo una finestra sulla struttura interna della Terra.

Le ondulazioni geoidali, le discrepanze tra queste due rappresentazioni della forma terrestre, sono quindi portatori di informazione fisica. Ogni metro di ondulazione geoidale racconta una storia geologica e geofisica: di crosta spessa sotto le montagne, di lastre litosferiche fredde che scendono nel mantello, di plume caldi che risalgono dalle profondità, di antichi processi tettonici i cui effetti gravitazionali persistono nel presente. Decifrare queste storie richiede l'integrazione di geodesia, geofisica, petrologia e geodinamica.

La precisione con cui possiamo ora determinare il geoide, dell'ordine del centimetro in regioni ben osservate, è un trionfo dell'osservazione scientifica e dell'analisi matematica. Questa precisione non è fine a se stessa ma abilita applicazioni pratiche (dal posizionamento GPS alla gestione delle risorse idriche) e investigazioni scientifiche (dalla circolazione oceanica alla convezione mantellica) che erano impensabili solo poche generazioni fa.

Guardando al futuro, possiamo anticipare miglioramenti continui nella risoluzione e accuratezza dei modelli geoidali, guidati da nuove generazioni di satelliti, da dati terrestri sempre più densi, e da algoritmi computazionali più sofisticati. Ma al di là dei miglioramenti quantitativi, è probabile che emergeranno anche nuovi paradigmi concettuali per comprendere la forma della Terra nel contesto di un pianeta dinamico il cui campo gravitazionale cambia nel tempo in risposta a processi geologici e climatici.

Il geoide rimane, dopo oltre un secolo e mezzo dalla formulazione di Stokes, un concetto centrale della geodesia e un oggetto di studio affascinante che collega le scale dall'infinitamente piccolo delle fluttuazioni gravitazionali alle strutture planetarie globali, dalla precisione millimetrica delle misurazioni moderne alle profondità di migliaia di chilometri nel mantello, dalla matematica pura della teoria del potenziale alle applicazioni pratiche quotidiane della navigazione e del rilevamento.

# Geoide e Ondulazioni Geoidali - Parte VIII

# Teoria Spettrale Avanzata del Potenziale Gravitazionale e Metodi di Inversione Geodetica

## Sviluppo Completo in Armoniche Sferiche e Proprietà di Convergenza

La rappresentazione del potenziale gravitazionale terrestre mediante sviluppo in armoniche sferiche costituisce il fondamento matematico dell'intera geodesia fisica moderna, e merita una trattazione molto più approfondita di quanto generalmente presentato nei testi introduttivi. La teoria sottostante a questa rappresentazione affonda le radici nella teoria classica delle equazioni differenziali alle derivate parziali e nella fisica matematica del diciannovesimo secolo, ma le sue applicazioni contemporanee richiedono una comprensione che si estende ben oltre la formulazione originale.

Consideriamo lo spazio esterno alla Terra, definito rigorosamente come la regione $r > R$ dove $R$ rappresenta un raggio sferico che racchiude completamente tutte le masse terrestri. In questa regione, il potenziale gravitazionale $V(r, \theta, \lambda)$ deve soddisfare l'equazione di Laplace nella sua forma tridimensionale completa. In coordinate sferiche, questa equazione assume la forma $(1/r^2)\,\partial/\partial r(r^2\,\partial V/\partial r) + (1/(r^2 \sin\theta))\,\partial/\partial\theta(\sin\theta\,\partial V/\partial\theta) + (1/(r^2 \sin^2\theta))\,\partial^2 V/\partial\lambda^2 = 0$, dove $\theta$ rappresenta la colatitudine misurata dal polo nord e $\lambda$ la longitudine misurata da un meridiano di riferimento.

La soluzione generale di questa equazione che sia regolare all'infinito e che abbia la simmetria appropriata rispetto alle rotazioni attorno all'asse polare può essere espressa come una serie infinita di armoniche sferiche. Questa rappresentazione non è semplicemente una convenzione matematica comoda, ma emerge naturalmente dalla teoria degli operatori autoaggiunti e dalla separazione delle variabili nell'equazione di Laplace. La completezza dell'insieme delle armoniche sferiche come base per lo spazio delle funzioni su una sfera è un risultato profondo dell'analisi funzionale, strettamente correlato alla teoria degli operatori compatti su spazi di Hilbert.

La forma canonica dello sviluppo armonico sferico per il potenziale gravitazionale è $V(r, \theta, \lambda) = (GM/r) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (a/r)^n P_{nm}(\cos\theta) [C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)]$, dove $GM$ rappresenta il parametro gravitazionale geocentrico (il prodotto della costante gravitazionale universale per la massa totale della Terra), $a$ è il raggio di riferimento (tipicamente il semiasse maggiore dell'ellissoide), $P_{nm}(\cos\theta)$ sono le funzioni associate di Legendre completamente normalizzate, e $C_{nm}$ ed $S_{nm}$ sono i coefficienti armonici sferici completamente normalizzati che caratterizzano la distribuzione di massa della Terra.

È essenziale comprendere con precisione la normalizzazione adottata per le funzioni di Legendre e i coefficienti armonici, poiché esistono molteplici convenzioni nella letteratura geodetica e geofisica, e la confusione tra diverse normalizzazioni ha storicamente causato errori significativi. La normalizzazione completamente normalizzata (fully normalized) o normalizzazione $4\pi$, che è lo standard nelle applicazioni geodetiche moderne, è definita in modo tale che l'integrale sulla sfera unitaria del quadrato di ciascuna armonica sferica sia uguale a uno. Matematicamente, questo significa che $\iint_{sfera} [P_{nm}(\cos\theta) \cos(m\lambda)]^2 \sin\theta\, d\theta\, d\lambda = 4\pi$, e similmente per i termini in seno.

Con questa normalizzazione, i coefficienti C_{nm} e S_{nm} hanno dimensioni di pura adimensionalità quando il potenziale è espresso nella forma sopra riportata. I coefficienti di basso grado hanno significati fisici diretti e interpretazioni geometriche. Il coefficiente C_{00} è identicamente uguale a uno e rappresenta il termine monopolare sferico del campo gravitazionale. I coefficienti C_{10}, C_{11} e S_{11} di grado uno sono identicamente nulli quando l'origine del sistema di coordinate è posta esattamente nel centro di massa della Terra, una condizione che definisce il cosiddetto sistema di riferimento geocentrico.

I coefficienti di grado due meritano un'attenzione particolare. Il coefficiente C_{20}, spesso denotato come $-J_2$ nella notazione geofisica tradizionale (dove il segno negativo è puramente convenzionale), quantifica lo schiacciamento polare della Terra. Il suo valore per la Terra è C_{20} ≈ -4,84166854 × $10^{-4}$, un numero che può sembrare piccolo ma che rappresenta un'enorme deviazione dalla sfericità quando moltiplicato per la scala planetaria. Questo coefficiente è dominato dall'effetto della rotazione terrestre, che produce una distribuzione di massa ellissoidale con eccesso equatoriale. La relazione teorica tra $J_2$ e lo schiacciamento geometrico f dell'ellissoide di equilibrio idrostatico è data approssimativamente da $J_2 \approx (2/3)f - (1/3)m$, dove $m = \omega^2 a^3/(GM)$ è il parametro di rotazione (con ω velocità angolare di rotazione). Per la Terra, m ≈ 3,461391 × $10^{-3}$, e la relazione predice $J_2$ ≈ 1,0826 × $10^{-3}$, in ottimo accordo con il valore osservato.

I coefficienti C_{21}, S_{21}, C_{22} e S_{22} descrivono la distribuzione triassiale della massa terrestre. Idealmente, un ellissoide di rivoluzione perfetto avrebbe C_{21} = S_{21} = 0 e C_{22} = S_{22} = 0. Nella realtà, questi coefficienti hanno valori piccolissimi ma non nulli. In particolare, C_{21} ≈ 1,5 × $10^{-6}$ e S_{21} ≈ -9 × $10^{-7}$, mentre C_{22} ≈ 2,4 × $10^{-6}$ e S_{22} ≈ -1,4 × $10^{-6}$. Questi valori infinitesimali riflettono l'ellitticità equatoriale della Terra: l'equatore non è un cerchio perfetto ma è leggermente ellittico, con il semiasse maggiore orientato approssimativamente lungo il meridiano 15° Ovest - 165° Est. Questa ellitticità equatoriale ammonta a circa settanta metri di differenza tra il raggio equatoriale massimo e minimo, un effetto minuscolo ma misurabile con precisione attraverso l'analisi delle perturbazioni orbitali satellitari.

I coefficienti di grado superiore (n ≥ 3) rappresentano deviazioni sempre più fini dalla simmetria sferica e dalla forma ellissoidale di primo ordine. La loro ampiezza decresce generalmente con il grado, sebbene non monotonicamente. Un'analisi dello spettro di potenza del campo gravitazionale, definito come la radice quadrata della somma dei quadrati di tutti i coefficienti di un dato grado, $\sigma_n = \sqrt{[\sum_{m=0}^{n} (C\{nm\}^2 + S_{nm}^2)]}$, rivela una struttura complessa. Per i gradi bassi (n < 10), lo spettro è dominato dagli effetti su larga scala della forma planetaria e delle maggiori province tettoniche. Per gradi intermedi (10 < n < 100), corrispondenti a lunghezze d'onda di qualche centinaio di chilometri, lo spettro riflette la struttura della litosfera e del mantello superiore. Per gradi alti (n > 100), lo spettro è influenzato sempre più dalla topografia e dalla batimetria, e dalla struttura dettagliata della crosta.

Un risultato fondamentale della teoria del potenziale è che lo spettro di potenza di un campo gravitazionale generato da masse casuali distribuite su una superficie sferica o in uno strato sferico decresce approssimativamente come una legge di potenza: $\sigma_n \propto n^{-p}$, dove l'esponente p dipende dalla dimensionalità della distribuzione di massa. Per masse distribuite su una superficie (come la topografia o variazioni di densità superficiale), p ≈ 2;

per masse distribuite in un volume tridimensionale (come variazioni di densità nel mantello), p può essere compreso tra 1 e 2. L'analisi dello spettro di potenza osservato del campo gravitazionale terrestre permette quindi di inferire proprietà statistiche della distribuzione di massa all'interno della Terra.

## Relazione Spettrale tra Anomalie di Gravità e Ondulazioni Geoidali

Una delle relazioni più eleganti e utili della geodesia fisica è la connessione spettrale tra le anomalie di gravità e le ondulazioni geoidali. Questa relazione emerge naturalmente quando entrambe le quantità sono espresse nel dominio spettrale attraverso i loro sviluppi in armoniche sferiche.

Supponiamo che l'anomalia in aria libera Δg sia sviluppata in armoniche sferiche sulla sfera di raggio R (tipicamente il raggio medio terrestre o il semiasse maggiore dell'ellissoide): $\Delta g(\theta, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} P_{nm}(\cos \theta) [\Delta g_{nm}^c \cos(m\lambda) + \Delta g_{nm}^s \sin(m\lambda)]$, dove $\Delta g_{nm}^c$ e $\Delta g_{nm}^s$ sono i coefficienti spettrali dell'anomalia di gravità. La somma inizia da n = 2 perché, per costruzione, le anomalie di gravità hanno media globale nulla (non c'è termine di grado zero) e non contengono termini di grado uno (che rappresenterebbero uno spostamento del centro di massa, assente per definizione in un sistema geocentrico).

Similmente, l'ondulazione geoidale N può essere sviluppata come $N(\theta, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} P_{nm}(\cos \theta) [N_{nm}^c \cos(m\lambda) + N_{nm}^s \sin(m\lambda)]$, dove $N_{nm}^c$ e $N_{nm}^s$ sono i coefficienti spettrali dell'ondulazione geoidale.

La relazione fondamentale che collega questi due sviluppi deriva dalla formula di Bruns $N = T/\gamma$ combinata con la relazione differenziale tra il potenziale perturbante T e l'anomalia di gravità. Nel dominio spettrale, questa relazione assume una forma algebrica straordinariamente semplice: $N_{nm}^c = (R/(n-1)\gamma) \Delta g_{nm}^c$ e $N_{nm}^s = (R/(n-1)\gamma) \Delta g_{nm}^s$, dove γ è un valore medio della gravità normale (tipicamente $\gamma \approx 9{,}81$ m/s²).

Questa relazione spettrale ha implicazioni profonde. Essa mostra che ogni coefficiente armonico dell'ondulazione geoidale è semplicemente proporzionale al corrispondente coefficiente dell'anomalia di gravità, con un fattore di proporzionalità che dipende solo dal grado armonico n. Il fattore 1/(n-1) indica che le componenti di alto grado (brevi lunghezze d'onda) delle anomalie di gravità contribuiscono relativamente meno all'ondulazione geoidale rispetto alle componenti di basso grado (grandi lunghezze d'onda). Questo è l'effetto di integrazione o filtraggio passa-basso: l'ondulazione geoidale, essendo un integrale delle anomalie di gravità, attenua le alte frequenze.

Quantitativamente, consideriamo un'anomalia di gravità con una singola componente armonica di grado n = 10, che corrisponde a una lunghezza d'onda di circa 4.000 km. Questa produrrebbe un'ondulazione geoidale con ampiezza ridotta di un fattore 1/(10-1) = 1/9 rispetto a un'anomalia di gravità con la stessa ampiezza ma grado n = 2 (lunghezza d'onda di circa 20.000 km). Per n = 100 (lunghezza d'onda di circa 400 km), il fattore di riduzione è $1/99 \approx 0{,}01$, indicando che anomalie gravitazionali a scale di poche centinaia di chilometri hanno effetti molto attenuati sul geoide.

Questa proprietà di filtraggio ha conseguenze pratiche importanti. Significa che il geoide è relativamente insensibile a strutture di piccola scala nella crosta terrestre, che possono produrre anomalie di gravità molto pronunciate ma lasciano firme geoidali modeste. Al contrario, strutture di grande scala nel mantello profondo, che potrebbero produrre solo deboli anomalie di gravità in superficie (a causa della grande distanza), possono generare ondulazioni geoidali significative perché i loro effetti si manifestano principalmente nei gradi armonici bassi.

La relazione spettrale permette anche di quantificare l'errore commesso nel troncare gli sviluppi armonici a un grado massimo finito n_max. Se l'ondulazione geoidale è calcolata utilizzando solo i coefficienti fino a n_max, l'errore dovuto al troncamento può essere stimato sommando i contributi dei gradi superiori. Poiché lo spettro di potenza del campo gravitazionale terrestre decresce approssimativamente come $\sigma_n \propto n^{-2}$, lo spettro dell'ondulazione geoidale, amplificato dal fattore 1/(n-1), decresce approssimativamente come $\sigma_{N,n} \propto n^{-3}$. Questo significa che l'errore dovuto al troncamento converge rapidamente, e sviluppi fino a qualche centinaio di gradi sono generalmente sufficienti per catturare quasi tutto il segnale geoidale.

## Inversione del Problema di Stokes e Tecniche di Regolarizzazione

La formula di Stokes, nella sua forma classica, fornisce una soluzione diretta al problema di determinare l'ondulazione geoidale N date le anomalie di gravità Δg su tutta la superficie terrestre. Tuttavia, nella pratica geodetica reale, il problema è invariabilmente mal-posto in senso matematico. Le anomalie di gravità sono note solo in un numero finito di punti discreti, con copertura spaziale disomogenea e affette da errori di misura. Inoltre, l'integrale di Stokes deve essere troncato a una distanza finita per ragioni computazionali, introducendo errori di troncamento.

La natura mal-posta del problema geodetico inverso richiede l'applicazione di tecniche di regolarizzazione sofisticate. Un approccio moderno consiste nel formulare il problema in un contesto bayesiano o di stima ottimale. Supponiamo di avere un vettore di osservazioni y (che potrebbe includere anomalie di gravità in punti discreti, ondulazioni geoidali da GPS/livellazione, disturbi geoidali da altimetria satellitare, eccetera) correlato al campo geoidale incognito attraverso un operatore di osservazione: $y = H[N] + \varepsilon$, dove H è l'operatore che mappa il campo geoidale sullo spazio delle osservazioni e ε rappresenta l'errore di misura.

Nel dominio spettrale, questo problema diventa lineare e separabile. Se rappresentiamo il campo geoidale attraverso i suoi coefficienti armonici sferici raccolti in un vettore $x = \{N_{nm}^c, N_{nm}^s\}$, e assumiamo che le osservazioni siano funzioni lineari di questi coefficienti, allora $y = Hx + \varepsilon$, dove ora H è una matrice che rappresenta la discretizzazione dell'operatore di osservazione. La soluzione ai minimi quadrati standard di questo problema è $\hat{x} = (H^T C_\varepsilon^{-1} H)^{-1} H^T C_\varepsilon^{-1} y$, dove $C_\varepsilon$ è la matrice di covarianza dell'errore di misura.

Tuttavia, questa soluzione è tipicamente instabile a causa del mal-condizionamento del problema: piccole variazioni nelle osservazioni (dovute a errori di misura) possono causare grandi variazioni nella soluzione stimata, specialmente nelle componenti di alto grado. La

regolarizzazione di Tikhonov fornisce una soluzione stabilizzata introducendo un termine di penalità sulla norma della soluzione: $\hat{x}_\alpha = (H^T C_\varepsilon^{-1} H + \alpha L^T L)^{-1} H^T C_\varepsilon^{-1} y$, dove $\alpha$ è il parametro di regolarizzazione e $L$ è una matrice di regolarizzazione (spesso scelta come l'identità o un operatore differenziale discretizzato).

La scelta del parametro di regolarizzazione $\alpha$ è cruciale e rappresenta un compromesso tra fedeltà ai dati e regolarità della soluzione. Metodi come il criterio della discrepanza (discrepancy principle), la validazione incrociata generalizzata (generalized cross-validation), o il principio della curva L (L-curve) sono comunemente utilizzati per selezionare un valore ottimale di $\alpha$. Il principio della curva L, in particolare, consiste nel tracciare la norma della soluzione $||\hat{x}_\alpha||$ contro la norma del residuo $||y - H\hat{x}_\alpha||$ per diversi valori di $\alpha$; la curva risultante ha tipicamente una forma a "L", e il punto di massima curvatura fornisce un valore ragionevole di $\alpha$ che bilancia fedeltà e regolarità.

Un approccio alternativo e più moderno utilizza la regolarizzazione stocastica o bayesiana, dove si introduce informazione a priori sulla struttura probabilistica del campo geoidale. Supponendo che i coefficienti geoidali abbiano una distribuzione a priori gaussiana con matrice di covarianza $C_x$, la soluzione bayesiana che massimizza la probabilità a posteriori (MAP estimate) è $\hat{x} = (H^T C_\varepsilon^{-1} H + C_x^{-1})^{-1} H^T C_\varepsilon^{-1} y$, formalmente identica alla regolarizzazione di Tikhonov con $L^T L = \alpha^{-1} C_x^{-1}$.

La specificazione della covarianza a priori $C_x$ può incorporare conoscenze fisiche sulla struttura del campo gravitazionale. Per esempio, un modello di covarianza comunemente utilizzato è quello di Kaula, che assume che la varianza dei coefficienti armonici decresca con il grado secondo una legge di potenza: $E[C_{nm}^2] = E[S_{nm}^2] = A^2/n^2$, dove $A$ è un parametro di scala (per la Terra, $A \approx 10^{-5}$ è un valore tipico). Questo modello riflette l'osservazione empirica che lo spettro di potenza del campo gravitazionale terrestre approssima approssimativamente una legge $n^{-2}$.

Una raffinatezza ulteriore consiste nell'utilizzare modelli di covarianza dipendenti sia dal grado $n$ sia dall'ordine $m$, riflettendo il fatto che lo spettro di potenza può mostrare anisotropie o dipendenze dal settore longitudinale. Inoltre, modelli gerarchici bayesiani possono essere costruiti dove i parametri del modello di covarianza (come il parametro di scala $A$) sono essi stessi trattati come variabili aleatorie con le proprie distribuzioni a priori, permettendo un apprendimento adattivo della struttura del campo gravitazionale dai dati.

## Metodi di Collocazione per Minimi Quadrati e Predizione Statistica Ottimale

La collocazione per minimi quadrati (least-squares collocation, LSC) rappresenta un framework unificato e potente per la combinazione di dati geodetici eterogenei e la predizione del campo gravitazionale. Questo metodo, sviluppato principalmente dalla scuola geodetica scandinava negli anni sessanta e settanta del ventesimo secolo, tratta il campo gravitazionale come un processo stocastico caratterizzato da una funzione di covarianza spaziale.

Il principio fondamentale della collocazione per minimi quadrati è la decomposizione del segnale osservato in tre componenti: una tendenza deterministica (trend), un segnale

stocastico correlato spazialmente, e rumore di misura non correlato. Matematicamente, un'osservazione generica l_i in un punto P_i può essere scritta come l_i = t(P_i) + s(P_i) + n_i, dove t rappresenta la tendenza (tipicamente modellata come un polinomio a basso ordine o come una combinazione di armoniche sferiche di basso grado), s è il segnale stocastico che contiene le variazioni di interesse, e n è il rumore di misura.

La potenza del metodo LSC risiede nel fatto che, una volta specificata la funzione di covarianza del segnale C_s(P_i, P_j) = E[s(P_i) s(P_j)], è possibile non solo stimare il segnale nei punti di osservazione ma anche predirlo in punti arbitrari non osservati, con una stima della varianza di predizione che quantifica l'incertezza. Se abbiamo osservazioni l = {l_1, l_2, ..., l_n} nei punti P_1, P_2, ..., P_n, e desideriamo predire il segnale in un nuovo punto P_0, la predizione ottimale (nel senso dei minimi quadrati) è ŝ(P_0) = c_0^T (C + C_n)^{-1} (l - t), dove c_0 è il vettore di covarianze tra il punto di predizione e i punti di osservazione, C è la matrice di covarianza del segnale tra i punti di osservazione, C_n è la matrice di covarianza del rumore di misura (tipicamente diagonale), e t è il vettore della tendenza calcolata nei punti di osservazione.

La varianza di predizione, che quantifica l'incertezza nella predizione, è data da σ²(P_0) = C_s(P_0, P_0) - c_0^T (C + C_n)^{-1} c_0. Questa espressione ha un'interpretazione intuitiva: la varianza di predizione è uguale alla varianza a priori del segnale nel punto P_0, ridotta da un termine che rappresenta l'informazione fornita dalle osservazioni circostanti. Quando i punti di osservazione sono molto distanti da P_0, le covarianze in c_0 sono piccole, il termine di riduzione è trascurabile, e la varianza di predizione si avvicina alla varianza a priori. Quando i punti di osservazione sono vicini e numerosi, il termine di riduzione è grande, e l'incertezza nella predizione è significativamente ridotta.

La scelta della funzione di covarianza è cruciale per il successo del metodo LSC. Nella geodesia fisica, una funzione di covarianza comunemente utilizzata per il disturbo di gravità (gravity disturbance) o per l'anomalia di gravità è il modello di covarianza di Tscherning-Rapp, che ha la forma C(ψ) = C_0 ∑_{n=2}^{N_max} [(n-1)/(n+1)] [(R/R_B)^{n+2}] σ_n² P_n(cos ψ), dove ψ è la distanza angolare tra i due punti, C_0 è un fattore di normalizzazione, R è il raggio della sfera di calcolo, R_B è il raggio di Bjerhammar (un parametro che rappresenta una sfera fittizia all'interno della Terra dove si assume siano concentrate le masse anomale), σ_n² è la varianza del grado n dello sviluppo armonico del campo gravitazionale, e P_n sono i polinomi di Legendre.

Questo modello di covarianza ha proprietà matematiche desiderabili: è positivo-definito (garantendo che le matrici di covarianza siano invertibili), decresce con la distanza (riflettendo la diminuzione di correlazione spaziale), e può essere derivato da assunzioni fisiche sulla distribuzione stocastica di massa all'interno della Terra. Il parametro R_B tipicamente assume valori tra 6.300 e 6.350 km (quindi qualche decina di chilometri sotto la superficie terrestre), riflettendo il fatto che le principali anomalie di massa responsabili delle variazioni del campo gravitazionale si trovano nella crosta e nel mantello superiore.

Un vantaggio significativo del metodo LSC è la sua capacità di combinare naturalmente diversi tipi di dati geodetici. Anomalie di gravità terrestri, disturbi geoidali da altimetria satellitare, ondulazioni geoidali da GPS/livellazione, e deviazioni della verticale possono essere tutti incorporati in un'unica soluzione, a patto che si conoscano le relazioni funzionali

tra queste diverse quantità e il campo gravitazionale sottostante, e le matrici di covarianza incrociate appropriate.

Le covarianze incrociate tra diversi funzionali del campo gravitazionale possono essere derivate teoricamente dalle proprietà del potenziale gravitazionale. Per esempio, la covarianza incrociata tra un'anomalia di gravità in un punto P_1 e un'ondulazione geoidale in un punto P_2 può essere espressa in termini dello sviluppo armonico sferico della covarianza del potenziale perturbante, applicando gli operatori differenziali appropriati. Questa derivazione rigorosa garantisce la consistenza fisica della predizione e permette di sfruttare tutte le informazioni disponibili in modo ottimale.

La limitazione principale del metodo LSC è computazionale: l'inversione della matrice (C + C_n) di dimensione n × n, dove n è il numero di osservazioni, richiede operazioni O(n³), che diventa proibitivo per n molto grande (tipicamente oltre qualche migliaio di punti con hardware standard). Sono state sviluppate numerose tecniche per alleviare questo problema computazionale, inclusi metodi gerarchici che suddividono il dominio in blocchi sovrapposti, tecniche di compressione della matrice che sfruttano la decadenza delle covarianze con la distanza, e formulazioni alternative basate su rappresentazioni wavelet o su griglie multilivello.

# Geoide e Ondulazioni Geoidali - Parte IX

## Metodi Computazionali Avanzati per la Determinazione del Geoide e Algoritmi di Fast Fourier Transform in Geodesia Sferica

### Trasformate di Fourier su Dominio Sferico e Analisi Armonica Sferica Computazionale

La determinazione pratica del geoide mediante la formula di Stokes o altre trasformazioni integrali richiede la valutazione numerica di integrali su superfici sferiche che coinvolgono kernel singolari o quasi-singolari. L'implementazione efficiente di questi calcoli rappresenta una sfida computazionale significativa che ha stimolato lo sviluppo di tecniche algoritmiche sofisticate basate sulla trasformata di Fourier veloce (Fast Fourier Transform, FFT) e sue generalizzazioni al dominio sferico.

La trasformata di Fourier su una sfera, nota più propriamente come trasformata armonica sferica, decompone una funzione definita sulla sfera nei suoi coefficienti armonici sferici. Data una funzione f(θ, λ) definita sulla sfera unitaria, dove θ è la colatitudine e λ la longitudine, la trasformata armonica sferica diretta calcola i coefficienti f_{nm} = ∫₀^π ∫₀^{2π} f(θ, λ) P_{nm}(cos θ) e^{-imλ} sin θ dθ dλ, dove P_{nm} sono le funzioni associate di Legendre normalizzate. La trasformata inversa ricostruisce la funzione dai coefficienti: f(θ, λ) = ∑*{n=0}^{∞}* ∑{m=-n}^{n} f_{nm} P_{nm}(cos θ) e^{imλ}.

La valutazione diretta di queste trasformate mediante integrazione numerica su una griglia sferica con N punti richiede operazioni dell'ordine di $O(N^2 L^2)$, dove L è il grado massimo degli armonici sferici considerati. Per applicazioni geodetiche moderne che richiedono L dell'ordine di mille o più, questo costo computazionale diventa proibitivo. La svolta computazionale è venuta dallo sviluppo di algoritmi di trasformata armonica sferica veloce (Fast Spherical Harmonic Transform, FSHT) che riducono la complessità a $O(L^2 \log^2 L)$ o addirittura $O(L^2 \log L)$ con algoritmi più sofisticati.

L'approccio fondamentale degli algoritmi FSHT consiste nella separazione delle variabili θ e λ. La dipendenza longitudinale $e^{im\lambda}$ è periodica e può essere trattata mediante FFT ordinaria unidimensionale, che ha complessità $O(N \log N)$ per N punti. La dipendenza latitudinale attraverso le funzioni di Legendre $P_{nm}(\cos \theta)$ è più complessa a causa della natura non periodica e della presenza di singolarità ai poli.

Una strategia efficace per la trasformata latitudinale utilizza le relazioni di ricorrenza a tre termini che connettono le funzioni di Legendre di diversi gradi e ordini. Queste relazioni permettono di calcolare tutti i $P_{nm}(\cos \theta)$ necessari mediante un processo ricorsivo stabile che parte da valori iniziali noti. La relazione di ricorrenza fondamentale è $(n - m + 1) P_{n+1,m}(x) = (2n + 1) x P_{nm}(x) - (n + m) P_{n-1,m}(x)$, che può essere applicata iterativamente per crescenti valori di n a m fissato.

Tuttavia, queste ricorrenze sono numericamente instabili per certi range di parametri, in particolare quando $|m|$ è vicino a n (le cosiddette funzioni settoriali) o quando si calcola a latitudini vicine ai poli. Sono state sviluppate varianti stabilizzate delle ricorrenze che utilizzano normalizzazioni appropriate o che operano su quantità ausiliarie correlate alle funzioni di Legendre ma con proprietà numeriche migliori.

Un metodo alternativo particolarmente elegante per la trasformata latitudinale sfrutta la connessione tra le funzioni di Legendre e i polinomi di Chebyshev. Mediante un cambio di variabile $x = \cos \theta$, le funzioni di Legendre possono essere espresse in termini di combinazioni lineari di polinomi di Chebyshev, che hanno proprietà numeriche eccellenti e possono essere valutati efficientemente mediante FFT applicata ai coseni discreti (Discrete Cosine Transform, DCT).

La teoria sottostante a questa connessione deriva dal fatto che sia le funzioni di Legendre sia i polinomi di Chebyshev sono soluzioni di equazioni differenziali di Sturm-Liouville con diverse funzioni peso. Le trasformazioni tra queste basi richiedono matrici di conversione che, per gradi armonici elevati, possono diventare mal condizionate, richiedendo tecniche di aritmetica ad alta precisione o algoritmi numericamente stabilizzati.

Un algoritmo FSHT completo procede tipicamente come segue. Dato un campionamento della funzione f su una griglia latitudine-longitudine con $N_\theta$ punti in latitudine e $N_\lambda = 2N_\theta$ punti in longitudine (scelti per soddisfare il teorema di campionamento di Nyquist sulla sfera), si applica prima una FFT unidimensionale lungo ogni cerchio di latitudine, ottenendo i coefficienti di Fourier in longitudine $f_m(\theta)$ per ciascun ordine $m = -N_\lambda/2, ..., N_\lambda/2 - 1$. Poi, per ciascun m fissato, si applica una trasformata latitudinale che proietta $f_m(\theta)$ sui polinomi di Legendre $P_{nm}$ per $n = |m|, |m| + 1, ..., L$, ottenendo i coefficienti armonici sferici $f_{nm}$.

La scelta appropriata dei punti di campionamento in latitudine è cruciale per l'accuratezza e l'efficienza della trasformata. Le scelte comuni includono punti equidistanti in θ (griglia equiangolare), punti equidistanti in cos θ (griglia equiareale), e le radici dei polinomi di Legendre (punti di Gauss-Legendre). I punti di Gauss-Legendre hanno la proprietà notevole che la quadratura di Gauss associata è esatta per polinomi fino a grado 2N_θ - 1, permettendo una trasformata armonica sferica esatta (a meno di errori di arrotondamento) fino a grado L = N_θ - 1.

## Implementazione Efficiente della Formula di Stokes mediante Convoluzione Sferica Veloce

La formula di Stokes per l'ondulazione geoidale N(P) = (R/4πγ) ∫∫*σ Δg(Q) S(ψ*{PQ}) dσ_Q è formalmente un prodotto di convoluzione sulla sfera tra l'anomalia di gravità Δg e il kernel di Stokes S. Il teorema di convoluzione per funzioni sferiche afferma che la convoluzione nel dominio spaziale corrisponde a un prodotto semplice nel dominio spettrale: se h = f * g è la convoluzione sferica di f e g, allora i coefficienti armonici sferici di h sono h_{nm} = √(4π/(2n+1)) f_{nm} g_{n0}, dove g_{n0} sono i coefficienti zonali di g (gli unici non nulli per una funzione azimutalmente simmetrica come un kernel di convoluzione).

Per la formula di Stokes, il kernel S(ψ) è azimutalmente simmetrico e può essere espanso in polinomi di Legendre zonali: S(ψ) = *∑{n=2}^{∞} S_n P_n(cos ψ), dove i coefficienti S_n possono essere calcolati analiticamente o numericamente. Combinando questo sviluppo con la relazione spettrale tra anomalie di gravità e ondulazioni geoidali N*{nm} = (R/(n-1)γ) Δg_{nm}, si ottiene che i coefficienti S_n sono proporzionali a 1/(n-1).

L'algoritmo di convoluzione sferica veloce procede quindi in tre passi: trasformata armonica sferica diretta di Δg per ottenere Δg_{nm}; moltiplicazione spettrale N_{nm} = (R/(n-1)γ) Δg_{nm} per tutti n, m; trasformata armonica sferica inversa per ottenere N(θ, λ). Ciascuno dei primi due passi ha complessità O(L² log L) usando FSHT, e il secondo passo ha complessità O(L²), per una complessità totale O(L² log L).

Questo rappresenta un miglioramento drammatico rispetto all'approccio di integrazione diretta, che avrebbe complessità O(N²) dove N = O(L²) è il numero di punti sulla griglia sferica. Per L = 2000 (corrispondente a risoluzione di circa dieci chilometri), l'approccio FFT è milioni di volte più veloce dell'integrazione diretta, rendendo praticamente fattibili calcoli che sarebbero altrimenti impossibili.

Tuttavia, l'applicazione diretta della convoluzione FFT soffre di alcuni problemi. Il primo è l'errore di aliasing spettrale: se i dati Δg contengono energia in gradi superiori a L_max, questa energia verrà erroneamente "piegata" (aliased) nei gradi inferiori a causa del campionamento discreto, producendo errori nella soluzione. La soluzione è assicurarsi che i dati siano filtrati passa-basso prima della trasformata, rimuovendo tutte le componenti con n > L_max.

Il secondo problema è il troncamento della serie armonica. Nella pratica, la somma ∑_{n=2}^{∞} deve essere troncata a un valore finito L_max. L'errore di troncamento può essere stimato utilizzando proprietà di convergenza della serie e dipende dal comportamento asintotico dello spettro di potenza delle anomalie di gravità. Per il campo

gravitazionale terrestre, lo spettro decresce approssimativamente come $\sigma_n \propto n^{-2}$, e l'errore di troncamento nell'ondulazione geoidale decresce approssimativamente come $\varepsilon_{trunc} \propto L_{max}^{-2}$, indicando convergenza quadratica.

Il terzo problema è il fenomeno di Gibbs alle discontinuità. Se le anomalie di gravità hanno discontinuità (per esempio, ai confini continente-oceano dove le correzioni topografiche cambiano abruptamente), la rappresentazione mediante serie di Fourier troncata produrrà oscillazioni spurie (ringing) vicino alle discontinuità. Queste oscillazioni hanno ampiezza che non decresce con l'aumentare di $L_{max}$, sebbene la loro larghezza spaziale diminuisca. Tecniche di smorzamento spettrale (tapering) o filtri di smoothing possono mitigare questo problema al costo di una riduzione della risoluzione effettiva.

## Metodi di Quadratura Adattiva e Integrazione Numerica in Regioni con Topografia Complessa

Nonostante l'efficienza degli algoritmi FFT, ci sono situazioni in cui l'integrazione numerica diretta della formula di Stokes o di altre trasformazioni integrali è preferibile o necessaria. Questo accade tipicamente quando si calcola il geoide in una regione limitata piuttosto che globalmente, quando i dati hanno distribuzione spaziale irregolare, o quando si richiede controllo preciso degli errori di integrazione in regioni con topografia molto complessa.

La sfida principale nell'integrazione numerica diretta della formula di Stokes è la singolarità del kernel per $\psi \to 0$. Il kernel di Stokes diverge come $S(\psi) \sim 2/\psi$ per piccoli $\psi$, una singolarità integrabile ma che richiede trattamento speciale per evitare errori numerici grandi o addirittura overflow computazionali.

Una strategia classica consiste nel dividere l'integrale in due parti: una regione vicina (inner zone) dove $\psi < \psi_0$ per qualche angolo di separazione $\psi_0$ (tipicamente qualche grado), e una regione lontana (outer zone) dove $\psi \geq \psi_0$. Nell'outer zone, il kernel è regolare e l'integrale può essere valutato mediante quadratura standard (per esempio, regola dei trapezi o Simpson su una griglia regolare). Nell'inner zone, si deve utilizzare una tecnica che tenga conto della singolarità.

Un approccio per l'inner zone consiste nell'utilizzare una formula approssimata che tiene conto della singolarità analiticamente. Per piccoli $\psi$, l'anomalia di gravità può essere approssimata da un polinomio bidimensionale attorno al punto di calcolo: $\Delta g(\psi, \alpha) \approx \Delta g_0 + \Delta g_x\, x + \Delta g_y\, y + \ldots$, dove $(x, y)$ sono coordinate cartesiane locali e $\alpha$ è l'azimut. Sostituendo questa approssimazione nell'integrale e integrando analiticamente su un disco di raggio $\psi_0$, si ottiene una formula chiusa che include termini logaritmici (dalla singolarità) e termini polinomiali.

Per esempio, il contributo di un'anomalia costante $\Delta g_0$ su un disco centrato nel punto di calcolo è $N_{inner} = (R/2\gamma)\, \Delta g_0\, [S(\psi_0) \sin^2(\psi_0/2) + 2(1 - \cos \psi_0)]$, dove la formula tiene conto esattamente della singolarità integrata. Correzioni dovute ai termini lineari $\Delta g_x$ e $\Delta g_y$ del gradiente dell'anomalia possono essere aggiunte, e il risultato è che il contributo dell'inner zone può essere calcolato con accuratezza molto maggiore rispetto a una quadratura diretta numerica.

Metodi di quadratura adattiva utilizzano griglie di integrazione a risoluzione variabile, con celle più fini nelle regioni dove l'integrando varia rapidamente e celle più grossolane dove varia lentamente. Un algoritmo adattivo tipico procede ricorsivamente: inizia con una griglia grossolana, valuta l'integrale su ciascuna cella usando una regola di quadratura di ordine basso e una di ordine alto, confronta i risultati per stimare l'errore locale, e suddivide ulteriormente le celle dove l'errore stimato supera una tolleranza prescritta.

Per la formula di Stokes, le regioni che richiedono refinement adattivo sono tipicamente quelle vicine al punto di calcolo (dove il kernel è singolare) e le regioni con forti gradienti nelle anomalie di gravità (discontinuità continente-oceano, zone di subduzione, margini di crosta spessa). L'algoritmo adattivo concentra automaticamente lo sforzo computazionale dove è necessario, raggiungendo accuratezza prescritta con un numero minimo di valutazioni dell'integrando.

Un'alternativa moderna utilizza tecniche di pannellizzazione (panelization) e integrazione simbolica. La superficie sferica è divisa in pannelli (tipicamente quadrilateri sferici o triangoli sferici), e su ciascun pannello l'anomalia di gravità è approssimata da una funzione semplice (costante, lineare, o biquadratica). L'integrale del kernel di Stokes moltiplicato per questa funzione semplice su un pannello può spesso essere valutato analiticamente o mediante quadratura di Gauss di ordine relativamente basso, evitando completamente problemi numerici alla singolarità.

## Fast Multipole Methods per Calcoli Gravitazionali su Larga Scala

I Fast Multipole Methods (FMM), originariamente sviluppati da Greengard e Rokhlin per problemi di N-corpi in fisica computazionale, rappresentano una classe di algoritmi che riducono la complessità del calcolo di interazioni gravitazionali (o elettrostatiche, che matematicamente sono identiche) da $O(N^2)$ a $O(N)$ o $O(N \log N)$, dove $N$ è il numero di particelle o elementi di massa.

Nel contesto geodetico, FMM può essere applicato al problema di calcolare il potenziale gravitazionale o le sue derivate in un insieme di punti di osservazione dovuto a una distribuzione discreta di masse o anomalie di massa rappresentate da un insieme di punti sorgente. Questo problema appare, per esempio, nel calcolo degli effetti topografici dettagliati, dove la topografia è discretizzata in un grande numero di prismi o poliedri, ciascuno con densità nota.

L'idea fondamentale di FMM è di organizzare gerarchicamente le masse sorgente e i punti di osservazione in una struttura ad albero (tipicamente un quadtree in due dimensioni o un octree in tre dimensioni), e di approssimare l'effetto collettivo di un gruppo di masse distanti mediante un'espansione multipolare attorno al centro del gruppo. Questa approssimazione è accurata quando la distanza dal centro del gruppo al punto di osservazione è molto maggiore della dimensione del gruppo.

Matematicamente, il potenziale gravitazionale a distanza $r$ da un insieme di masse $m_i$ alle posizioni $r_i$ può essere espresso come $V(r) = G \sum_i m_i / |r - r_i|$. Se tutte le masse sono contenute in una regione compatta di dimensione $d$ e il punto di osservazione è a distanza $R >> d$ dal centro della regione, possiamo espandere $V$ in una serie di multipoli: $V(r) \approx G [M/R + (M^{(1)} \cdot \hat{R})/R^2 + (1/2)\, M^{(2)} : (\hat{R} \otimes \hat{R})/R^3 + ...]$, dove $M = \sum_i m_i$ è la massa totale,

$M^{(1)} = \sum_i m_i r_i$ è il momento di dipolo, $M^{(2)} = \sum_i m_i (r_i \otimes r_i)$ è il tensore di quadrupolo, e così via.

L'espansione multipolare converge rapidamente se $R >> d$, e troncando dopo pochi termini (tipicamente dieci-venti) si ottiene un'approssimazione con errore controllato. Il vantaggio computazionale è che, una volta calcolati i multipoli per un gruppo di masse (costo O(N) dove N è il numero di masse nel gruppo), l'interazione con qualsiasi punto di osservazione lontano può essere valutata in tempo costante O(1) usando l'espansione troncata, invece di richiedere O(N) operazioni per sommare contributi individuali.

L'algoritmo FMM completo organizza le masse in una gerarchia di livelli. Al livello più fine, ciascuna cella dell'octree contiene un piccolo numero di masse individuali. Per ciascuna cella, si calcolano i momenti multipolari che riassumono l'effetto collettivo delle masse in quella cella. Poi, questi multipoli vengono propagati verso l'alto nella gerarchia: i multipoli di celle figlie vengono combinati per formare i multipoli della cella genitore, un processo noto come upward pass o aggregazione multipolare.

Una volta completato l'upward pass, si procede con il downward pass per calcolare il potenziale ai punti di osservazione. Per ciascun punto, si identifica la cella che lo contiene, e si accumula il contributo delle celle "ben separate" usando le espansioni multipolari pre-calcolate. Due celle sono considerate ben separate se la loro distanza è maggiore di qualche multiplo della loro dimensione (tipicamente un fattore due o tre). Il contributo delle celle vicine, non ben separate, deve essere calcolato direttamente, ma poiché ciascuna cella contiene solo un piccolo numero di masse, questo contributo diretto ha costo limitato.

La complessità totale dell'algoritmo FMM è O(N) se il numero di livelli nella gerarchia è O(log N), come accade per distribuzioni di masse relativamente uniformi. Per distribuzioni molto non uniformi, possono essere necessari algoritmi FMM adattivi che usano octree non bilanciati con raffinamento locale, mantenendo comunque complessità quasi-lineare.

Nel contesto geodetico, FMM è stato applicato con successo al calcolo di correzioni topografiche ad alta risoluzione per anomalie di gravità e ondulazioni geoidali. La topografia terrestre può essere discretizzata in centinaia di milioni di prismi utilizzando modelli digitali di elevazione globali a risoluzione di trenta metri o migliore. Il calcolo diretto dell'effetto gravitazionale di tutti questi prismi su una griglia di punti di calcolo sarebbe computazionalmente proibitivo, ma con FMM diventa fattibile in tempi ragionevoli su cluster di calcolo moderni.

Un raffinamento importante per applicazioni geodetiche è l'adattamento di FMM alla geometria sferica. L'algoritmo FMM classico utilizza espansioni multipolari cartesiane, appropriate per problemi con geometria planare o contenuta in regioni limitate dello spazio. Per problemi su scala globale sulla sfera terrestre, è più naturale utilizzare espansioni in armoniche sferiche, che sono la generalizzazione naturale dei multipoli alla geometria sferica.

Questa versione sferica di FMM, talvolta chiamata Spherical Fast Multipole Method (SFMM), organizza le masse in una gerarchia di patches sferiche definite mediante suddivisione ricorsiva della sfera (per esempio, mediante icosaedri geodetici o mediante partizioni latitudine-longitudine gerarchiche). Per ciascun patch, l'effetto collettivo delle masse interne

è rappresentato mediante uno sviluppo armonico sferico locale troncato. La traduzione delle espansioni armoniche da una regione sferica all'altra richiede formule di ricombinazione armoniche che sono più complesse delle traslazioni cartesiane ma che possono essere pre-calcolate e tabulate per efficienza.

## Metodi di Elementi di Confine e Formulazioni Integrali del Problema Geodetico

Un approccio alternativo per risolvere il problema geodetico al contorno utilizza il metodo degli elementi di confine (Boundary Element Method, BEM), una tecnica numerica che riduce problemi differenziali volumetrici a problemi integrali sul confine del dominio. Per il problema geodetico, dove si vuole determinare il potenziale armonico T nello spazio esterno alla Terra data una condizione al contorno sulla superficie, BEM è naturalmente applicabile.

Il metodo BEM parte dalla rappresentazione integrale del potenziale armonico. Per un punto P nello spazio esterno a una superficie chiusa S, il potenziale T(P) può essere espresso come $T(P) = \iint_S [\mu(Q) / |P-Q| + \nu(Q) \partial/\partial n_Q (1/|P-Q|)] dS_Q$, dove μ e ν sono densità di strato semplice e doppio rispettivamente, distribuite sulla superficie S, e $\partial/\partial n_Q$ indica derivata normale alla superficie in Q.

Imponendo la condizione al contorno (per esempio, che $\partial T/\partial n = -\Delta g$ sulla superficie S), si ottiene un'equazione integrale per le densità incognite μ e/o ν. Questa equazione integrale ha la forma generale $\alpha \mu(P) + \iint_S \mu(Q) K(P,Q) dS_Q = f(P)$, dove K è un kernel noto e f è una funzione nota derivata dai dati al contorno, e α è una costante che dipende dalla geometria locale della superficie in P ($\alpha = 1/2$ per superficie regolare).

La discretizzazione di questa equazione integrale mediante BEM consiste nel dividere la superficie S in un numero finito N di elementi (tipicamente triangoli o quadrilateri), approssimare le densità incognite su ciascun elemento mediante funzioni di forma semplici (costanti, lineari, o quadratiche), e imporre l'equazione integrale in un insieme di punti di collocation (tipicamente i baricentri o i nodi degli elementi). Questo porta a un sistema lineare $N \times N$ per i valori nodali delle densità.

La matrice del sistema BEM è tipicamente piena (non sparsa) perché ciascun elemento interagisce con tutti gli altri attraverso l'integrale. Questo sembra sfavorevole rispetto ai metodi agli elementi finiti che producono matrici sparse. Tuttavia, per problemi di potenziale su domini illimitati come il problema geodetico esterno, BEM ha il vantaggio di discretizzare solo la superficie (bidimensionale) piuttosto che il volume (tridimensionale), riducendo drasticamente il numero di gradi di libertà.

La valutazione degli integrali sui singoli elementi per costruire la matrice del sistema richiede attenzione speciale quando il punto di collocation è sullo stesso elemento o su un elemento vicino, perché il kernel diventa singolare o quasi-singolare. Tecniche di regolarizzazione, trasformazioni di coordinate, e quadrature speciali sono state sviluppate per trattare queste singolarità accuratamente.

Un vantaggio di BEM è la possibilità di trattare geometrie arbitrarie della superficie terrestre senza approssimazioni. La topografia reale può essere rappresentata mediante una mesh triangolare dettagliata generata da modelli digitali di elevazione, e BEM calcola la soluzione

direttamente su questa geometria. Questo contrasta con metodi basati su espansioni armoniche sferiche che assumono implicitamente una geometria sferica o ellissoidale di riferimento.

Tuttavia, la soluzione di sistemi lineari densi $N \times N$ ha complessità $O(N^3)$ con metodi diretti (fattorizzazione LU) o $O(N^2 k)$ con metodi iterativi (dove $k$ è il numero di iterazioni), che diventa proibitivo per N grande (tipicamente oltre qualche decina di migliaia). Questo ha stimolato lo sviluppo di BEM accelerati mediante tecniche come FMM (discusso sopra) o metodi multipolari gerarchici (Hierarchical Matrices, H-matrices) che riducono la complessità a quasi-lineare.

L'integrazione di BEM con FMM produce algoritmi Fast BEM che possono trattare problemi con milioni di gradi di libertà. In questi algoritmi, la matrice piena del sistema BEM non viene mai formata esplicitamente; invece, il prodotto matrice-vettore necessario nei solutori iterativi (per esempio, GMRES) viene valutato efficientemente usando FMM, con complessità $O(N \log N)$ o $O(N)$ per prodotto.

## Parallelizzazione e High-Performance Computing nella Geodesia Computazionale

La determinazione di modelli geoidali globali ad alta risoluzione rappresenta un problema computazionalmente intensivo che beneficia enormemente di architetture di calcolo parallelo. I moderni supercomputer con migliaia o decine di migliaia di core di calcolo permettono di affrontare problemi che sarebbero altrimenti intrattabili, ma richiedono algoritmi e implementazioni software progettate specificamente per sfruttare il parallelismo.

Ci sono due paradigmi principali di parallelizzazione rilevanti per la geodesia computazionale: parallelismo a memoria condivisa (shared-memory parallelism) usando thread multipli su processori multi-core, e parallelismo a memoria distribuita (distributed-memory parallelism) usando comunicazione di messaggi tra nodi di un cluster. Il primo è tipicamente realizzato mediante OpenMP o threading nativo, il secondo mediante MPI (Message Passing Interface).

Gli algoritmi FFT sono intrinsecamente molto parallelizzabili. La trasformata di Fourier di un array può essere decomposta in trasformate di sottoarray più piccoli che possono essere calcolati indipendentemente su processori diversi. Le moderne librerie FFT come FFTW (Fastest Fourier Transform in the West) includono implementazioni parallele che scalano efficientemente su decine o centinaia di core.

Per la trasformata armonica sferica, la parallelizzazione può sfruttare il fatto che le trasformate lungo diversi cerchi di latitudine sono indipendenti e possono essere calcolate concorrentemente. Similmente, per diversi ordini m, le trasformate latitudinali sono indipendenti. Una strategia di parallelizzazione efficiente distribuisce i dati sulla griglia sferica tra processori in modo che ciascun processore gestisca un sottoinsieme di latitudini o ordini, minimizzando la comunicazione necessaria.

Tuttavia, la trasformata armonica sferica richiede trasposizioni globali dei dati (da una decomposizione per latitudini a una per ordini m, e viceversa), che corrispondono a operazioni di comunicazione collettiva (all-to-all) tra tutti i processori. Queste comunicazioni

possono diventare il collo di bottiglia prestazionale su cluster di grandi dimensioni con interconnessioni non ottimali. Algoritmi sofisticati di trasposizione distribuita minimizzano il volume di dati comunicati e il numero di sincronizzazioni necessarie.

Per metodi che richiedono la soluzione di grandi sistemi lineari (come BEM o LSC), la parallelizzazione può sfruttare algoritmi di algebra lineare parallela. Solutori iterativi come il metodo del gradiente coniugato o GMRES richiedono principalmente prodotti matrice-vettore e prodotti scalari, entrambe operazioni facilmente parallelizzabili. Se la matrice è distribuita tra processori in modo block-row o block-column, il prodotto matrice-vettore richiede comunicazione solo tra processori vicini nella decomposizione.

Precondizionatori efficienti sono cruciali per la convergenza rapida di solutori iterativi, ma molti precondizionatori classici (come fattorizzazione incompleta ILU) sono intrinsecamente sequenziali e difficili da parallelizzare. Precondizionatori alternativi parallelizzabili includono precondizionatori multilivello (multigrid), precondizionatori basati su decomposizione di dominio (come metodi di Schwarz), e precondizionatori sparsificati che approssimano l'inverso della matrice con una matrice sparsa che può essere invertita efficientemente.

L'uso di GPU (Graphics Processing Units) per il calcolo scientifico ha rivoluzionato molte aree della modellazione numerica, e la geodesia computazionale ha iniziato a beneficiare di questa tecnologia. Le GPU moderne contengono migliaia di core di calcolo che possono eseguire operazioni aritmetiche semplici in parallelo massiccio. Algoritmi con high arithmetic intensity (molte operazioni per ogni accesso alla memoria), come prodotti matrice-matrice, FFT, e valutazioni di funzioni elementari, sono particolarmente adatti per accelerazione GPU.

Implementazioni GPU-accelerate di trasformate armoniche sferiche hanno dimostrato accelerazioni di dieci-cento volte rispetto a implementazioni CPU sequenziali. Similmente, algoritmi FMM su GPU hanno raggiunto prestazioni notevolmente superiori a implementazioni CPU. Tuttavia, la programmazione GPU richiede attenzione a dettagli architetturali come la gerarchia di memoria (registri, shared memory, global memory), la coalescenza degli accessi alla memoria, e l'occupancy dei multiprocessori, rendendo lo sviluppo di codice GPU-efficiente significativamente più complesso rispetto a codice CPU tradizionale.

Librerie software standard per geodesia computazionale stanno gradualmente incorporando supporto per HPC. La libreria SHTOOLS (Spherical Harmonic Tools), ampiamente usata per analisi armonica sferica in scienze planetarie e geofisica, ha versioni parallelizzate con OpenMP. Pacchetti software per calcoli geoidali come GRAVSOFT e GEOCOL hanno iniziato a integrare capacità di calcolo distribuito. Tuttavia, la maggior parte del software geodetico operazionale rimane progettato per singoli workstation, e la transizione a pieno HPC richiederà sforzi di ingegneria software sostanziali.

## Validazione e Analisi di Sensibilità dei Modelli Geoidali Numerici

La validazione di modelli geoidali numerici, ovvero la verifica che il modello produca risultati accurati e affidabili, è una componente essenziale ma spesso trascurata della geodesia computazionale. A differenza di problemi con soluzioni analitiche note che possono essere

usate come benchmark, il problema geodetico reale non ha soluzione esatta conosciuta, rendendo la validazione più sottile.

Una strategia di validazione consiste nel confrontare il modello geoidale con osservazioni indipendenti di ondulazioni geoidali da punti di controllo GPS/livellazione. In punti dove sono disponibili sia altezze ellissoidiche accurate da GPS sia altezze ortometriche accurate da livellazione, l'ondulazione geoidale osservata N^{obs} = h - H può essere confrontata con il valore predetto dal modello N^{model}. Discrepanze sistematiche o anomalamente grandi indicano problemi nel modello o nei dati di input.

L'analisi statistica di queste discrepanze fornisce metriche di accuratezza. La radice dell'errore quadratico medio (RMSE) RMSE = √(1/N ∑*{i=1}^{N} (N_i^{obs} - N_i^{model})²) quantifica l'accuratezza globale. Il bias medio bias = (1/N)* ∑{i=1}^{N} (N_i^{obs} - N_i^{model}) rivela eventuali errori sistematici (offset). La deviazione standard dopo rimozione del bias, STD = √(1/(N-1) ∑_{i=1}^{N} [(N_i^{obs} - N_i^{model}) - bias]²), quantifica l'errore casuale.

Per modelli geoidali regionali o nazionali di alta precisione, si aspettano tipicamente RMSE dell'ordine di uno-cinque centimetri in regioni con buona copertura di dati gravimetrici e topografici. Discrepanze maggiori possono indicare errori nei dati di input (anomalie di gravità con bias non rilevati, errori di altezza GPS o livellazione nei punti di controllo), problemi numerici nell'integrazione o interpolazione, o inadeguatezza del modello teorico (per esempio, trascurare effetti non lineari in regioni montuose).

Una tecnica di validazione complementare è il cross-validation: si rimuove sistematicamente una frazione dei dati gravimetrici (per esempio, il dieci %), si calcola il modello geoidale usando solo il novanta % rimanente, e si confrontano le anomalie di gravità predette dal modello nei punti omessi con le osservazioni reali. L'accordo quantifica la capacità predittiva del modello e del metodo di determinazione.

L'analisi di sensibilità studia come le incertezze nei dati di input si propagano attraverso il processo di calcolo per produrre incertezze nel modello geoidale finale. Formalmente, se il modello geoidale è una funzione N = F(d) dei dati d, e i dati hanno incertezze δd, l'incertezza propagata nel geoide è δN ≈ (∂F/∂d) δd, dove ∂F/∂d è la matrice di sensibilità o Jacobiana.

Per il problema geodetico lineare, questa matrice di sensibilità può essere calcolata esplicitamente o può essere approssimata mediante perturbazioni finite: perturbare leggermente ciascun dato di input, ricalcolare il modello geoidale, e osservare la variazione risultante. Questo approccio, sebbene concettualmente semplice, è computazionalmente costoso se il numero di dati è grande (milioni), richiedendo milioni di ricalcoli del modello.

Metodi più efficienti per analisi di sensibilità includono metodi adjoint, derivati dalla teoria del controllo ottimale. Il metodo adjoint calcola il gradiente di una funzione obiettivo rispetto a tutti i parametri di input con un costo computazionale che è solo un piccolo multiplo (tipicamente due-tre volte) del costo di una singola valutazione forward del modello, indipendentemente dal numero di parametri. Questo è particolarmente vantaggioso per problemi inversi con molti parametri.

Un approccio bayesiano alla quantificazione delle incertezze tratta i dati di input e il modello stesso come variabili aleatorie con distribuzioni di probabilità. L'inferenza bayesiana combina la verosimiglianza dei dati (quanto bene il modello spiega le osservazioni) con distribuzioni a priori sui parametri per produrre distribuzioni a posteriori che quantificano le incertezze nei parametri inferiti e nelle predizioni del modello.

Per problemi geodetici, un framework bayesiano completo richiederebbe la specificazione di: distribuzioni a priori sui coefficienti armonici sferici del campo gravitazionale (o sulla distribuzione di densità sottostante); modelli di likelihood che connettono queste quantità alle osservazioni gravimetriche, altimetriche, e GPS/livellazione tenendo conto degli errori di misura; e metodi di campionamento (come Markov Chain Monte Carlo) per esplorare le distribuzioni a posteriori ad alta dimensione.

Implementazioni pratiche di inferenza bayesiana in geodesia sono ancora relativamente rare a causa della complessità computazionale e della difficoltà di specificare distribuzioni a priori fisicamente significative. Tuttavia, con il crescente interesse per la quantificazione rigorosa delle incertezze e con la disponibilità di maggiore potenza di calcolo, ci si aspetta che approcci bayesiani diventino più comuni nei prossimi anni.

# Geoide e Ondulazioni Geoidali - Parte X

## Altimetria Satellitare Radar e Laser: Principi Fisici, Tecniche di Elaborazione Dati e Applicazioni alla Determinazione del Geoide Oceanico

### Principi Fisici dell'Altimetria Radar e Architettura dei Sistemi Satellitari

L'altimetria satellitare radar rappresenta una delle tecnologie più rivoluzionarie per l'osservazione degli oceani e la determinazione del geoide nelle regioni marine. Il principio fondamentale è ingannevolmente semplice: un satellite in orbita trasmette impulsi radar verticalmente verso la superficie oceanica sottostante e misura con precisione il tempo di ritorno del segnale riflesso, determinando così la distanza satellite-superficie. Conoscendo con alta accuratezza la posizione del satellite nello spazio (l'altezza orbitale rispetto all'ellissoide di riferimento), si può dedurre l'altezza della superficie oceanica rispetto allo stesso ellissoide.

Matematicamente, se h_sat è l'altezza del satellite sopra l'ellissoide, r_sat è la distanza misurata satellite-oceano (range), e δr rappresenta un insieme di correzioni che discuteremo, l'altezza della superficie oceanica (sea surface height, SSH) è SSH = h_sat - r_sat - δr. L'ondulazione geoidale sull'oceano può poi essere estratta sottraendo la topografia dinamica oceanica, come discusso precedentemente.

La tecnologia altimetrica radar ha subito una evoluzione notevole dalle prime missioni degli anni settanta (Skylab, GEOS-3) ai moderni sistemi come Jason-3, Sentinel-3 e Sentinel-6. I parametri chiave che caratterizzano le prestazioni di un altimetro includono: la precisione

della misura di range (tipicamente uno-due centimetri per misurazioni medie su un secondo), la frequenza di ripetizione degli impulsi (tipicamente mille-duemila impulsi al secondo), la larghezza del footprint sulla superficie oceanica (il diametro dell'area illuminata, tipicamente due-dieci chilometri), e la stabilità orbitale del satellite.

Il segnale radar trasmesso è tipicamente un impulso chirp, ovvero un impulso la cui frequenza varia linearmente nel tempo. Questa modulazione di frequenza interna all'impulso permette tecniche di compressione dell'impulso che migliorano la risoluzione temporale effettiva. L'impulso trasmesso ha durata dell'ordine di microsecondi e frequenza portante nella banda Ku (circa tredici gigahertz) o in combinazione con banda C (circa cinque gigahertz) per permettere correzioni ionosferiche.

Quando l'impulso radar raggiunge la superficie oceanica, non incontra una superficie piana ma una superficie rugosa con onde di diverse scale, dalla capillarità millimetrica (generata dal vento locale) alle onde di gravità di decine o centinaia di metri. Questa rugosità causa un'espansione temporale del segnale di ritorno: i primi fotoni riflessi provengono dal punto subsatellitare (il nadir), mentre fotoni successivi provengono da regioni progressivamente più lontane dal nadir sulla superficie ondulata.

La forma del segnale di ritorno (waveform) contiene informazioni non solo sul range medio ma anche sullo stato del mare. Il waveform può essere modellizzato come una convoluzione della risposta impulsiva dell'altimetro (determinata dalla forma dell'impulso trasmesso e dalle caratteristiche del ricevitore) con una funzione che descrive la distribuzione statistica delle altezze della superficie oceanica nel footprint. Per oceano calmo con rugosità piccola, il waveform ha una salita ripida (leading edge) seguita da un plateau. Per mare mosso, la salita è più graduale e il plateau è inclinato.

L'elaborazione del waveform per estrarre il range preciso richiede fitting del waveform osservato con un modello teorico (tipicamente il modello di Brown, sviluppato negli anni settanta). I parametri liberi del modello includono: il tempo di arrivo (che determina il range), l'ampiezza (correlata al coefficiente di riflessione della superficie, o backscattering coefficient), la pendenza della rampa (correlata all'altezza significativa delle onde, SWH), e l'inclinazione del plateau (correlata alla deriva strumentale o a effetti di puntamento off-nadir).

Il fit del modello ai dati osservati è tipicamente effettuato mediante regressione non lineare ai minimi quadrati, un processo computazionalmente intensivo che deve essere ripetuto per ciascuno dei mille-duemila waveform acquisiti ogni secondo. Algoritmi ottimizzati e hardware dedicato (processori di segnale digitale) sono necessari per elaborazione in tempo reale o near-real-time a bordo del satellite o a terra.

## Correzioni Atmosferiche, Ionosferiche e Geofisiche nell'Altimetria Radar

La misura grezza del range dall'altimetro deve essere corretta per una serie di effetti atmosferici, ionosferici e geofisici che alterano la propagazione del segnale radar o la posizione effettiva della superficie riflettente. Queste correzioni sono cruciali per raggiungere la precisione centimetrica necessaria per applicazioni geodetiche e oceanografiche.

La correzione ionosferica tiene conto del ritardo che il segnale radar subisce attraversando la ionosfera, lo strato di atmosfera ionizzata che si estende da circa ottanta a mille chilometri di altitudine. Gli elettroni liberi nella ionosfera causano un ritardo del segnale che dipende dalla frequenza secondo $\delta r_{iono} = K / f^2 TEC$, dove f è la frequenza del radar, TEC (Total Electron Content) è il contenuto totale di elettroni integrato lungo il percorso, e K è una costante ($K \approx 40{,}3$ m·MHz² / TECU, dove TECU = $10^{16}$ elettroni/m²).

Poiché il ritardo è dipendente dalla frequenza, può essere misurato direttamente utilizzando altimetri a doppia frequenza che trasmettono simultaneamente in banda Ku e banda C. La differenza nei range misurati alle due frequenze permette di calcolare TEC e quindi la correzione ionosferica. Per altimetri a singola frequenza, si devono utilizzare modelli ionosferici globali derivati da dati GPS o da altri osservabili.

La correzione ionosferica varia tipicamente tra zero e quaranta centimetri, con variazioni diurne (massimo durante il giorno quando la ionizzazione solare è maggiore), stagionali, e con il ciclo solare undecennale. Durante periodi di alta attività solare o tempeste geomagnetiche, la correzione può raggiungere valori eccezionali di un metro o più, introducendo incertezze significative se non correttamente modellata.

La correzione troposferica secca tiene conto del ritardo causato dai gas atmosferici asciutti (principalmente azoto e ossigeno) nella troposfera. Questo ritardo dipende dalla pressione atmosferica secondo $\delta r_{dry} = -2{,}277 \times 10^{-3} P_s$, dove $P_s$ è la pressione al livello del mare in millibar. La pressione può essere stimata da modelli meteorologici globali (come ECMWF o NCEP) con accuratezza tipica di qualche millibar, corrispondente a incertezza nel range di circa mezzo centimetro.

La correzione troposferica umida tiene conto del ritardo addizionale causato dal vapore acqueo, che è molto più variabile della componente secca. Il ritardo umido può essere espresso come $\delta r_{wet} = -0{,}064 \times PWV$, dove PWV (Precipitable Water Vapor) è il vapore acqueo precipitabile in millimetri. PWV può variare da pochi millimetri in regioni polari secche a sessanta millimetri o più in regioni tropicali umide, producendo correzioni al range da pochi millimetri a quattro centimetri.

La difficoltà con la correzione umida è che PWV varia su scale spaziali e temporali molto brevi (decine di chilometri, ore), rendendo difficile la sua stima accurata da modelli meteorologici. I moderni altimetri sono tipicamente accompagnati da radiometri a microonde che misurano la radiazione termica emessa dall'atmosfera in diverse bande di frequenza sensibili al vapore acqueo. Da queste misurazioni, PWV può essere inferito con accuratezza di uno-due millimetri (corrispondente a circa un millimetro nel range), significativamente meglio che da modelli meteorologici.

Il sea state bias (SSB) è una correzione empirica che tiene conto di bias sistematici nel range stimato che dipendono dallo stato del mare. La fisica dietro SSB è complessa e coinvolge molteplici effetti: in mare mosso con onde alte, le creste delle onde (che sono più affilate) riflettono il radar più efficacemente delle valli (che sono più arrotondate), causando un bias verso l'alto nella misura dell'altezza media. Inoltre, il tracker dell'altimetro può essere sbilanciato da fenomeni non lineari nella riflessione radar da superfici molto rugose.

SSB è tipicamente parametrizzato come funzione dell'altezza significativa delle onde (SWH) e della velocità del vento: SSB = a_1 SWH + a_2 SWH² + a_3 U_10 + a_4 U_10², dove U_10 è la velocità del vento a dieci metri di altezza, e i coefficienti a_i sono determinati empiricamente mediante confronto delle misure altimetriche con dati da boe oceanografiche o con modelli oceanografici. SSB può raggiungere dieci-quindici centimetri in condizioni di mare molto mosso e varia significativamente tra diverse missioni altimetriche a causa di differenze strumentali.

La correzione di marea oceanica tiene conto dello spostamento verticale della superficie oceanica dovuto alle maree astronomiche (gravitazionali) e alle maree di carico (loading tides). Le maree oceaniche sono causate dalle forze gravitazionali della Luna e del Sole e possono raggiungere ampiezze di parecchi metri in regioni con risonanza (per esempio, la Baia di Fundy in Canada ha maree che superano dieci metri). Modelli di marea globali ad alta risoluzione (come FES2014, TPXO9, GOT4.10) forniscono predizioni delle maree con accuratezza tipica di due-cinque centimetri in oceano aperto, sebbene l'accuratezza sia peggiore in regioni costiere complesse.

La correzione di marea terrestre tiene conto della deformazione della Terra solida dovuta alle forze di marea, che sposta verticalmente la crosta su cui è definito il sistema di riferimento geodetico. Questa correzione è calcolata con alta precisione usando la teoria della Terra elastica ed è tipicamente dell'ordine di dieci-venti centimetri con variazione semidiurna. A differenza delle correzioni atmosferiche che hanno incertezze significative, la marea terrestre può essere calcolata con errori inferiori al millimetro.

La correzione di carico oceanico (ocean loading) tiene conto della deformazione della Terra solida causata dal peso variabile degli oceani sopra di essa a causa delle maree oceaniche. Quando l'acqua si accumula in una regione durante l'alta marea, la crosta sottostante si deprime elasticamente; quando l'acqua si ritira, la crosta si solleva. Questo effetto può raggiungere alcuni centimetri e varia con pattern spaziali complessi che dipendono dalla geometria delle coste e dalla struttura elastica della litosfera.

La correzione di pressione atmosferica inversa (inverse barometer correction) tiene conto dell'effetto della pressione atmosferica variabile sulla superficie oceanica. Un aumento della pressione atmosferica di un millibar deprime la superficie oceanica di circa un centimetro (relazione inversa). Questo effetto è chiamato "inverse barometer" perché l'oceano si comporta come un barometro invertito. La correzione è δr_IB = -g_inv (P - P_mean), dove P è la pressione atmosferica locale, P_mean è la pressione media globale (circa 1.013 millibar), e g_inv ≈ 9,948 mm/millibar è il coefficiente di risposta inversa.

L'effetto inverse barometer è valido per variazioni di pressione su scale temporali superiori a pochi giorni e scale spaziali superiori a qualche centinaio di chilometri. Per variazioni più rapide o localizzate, l'oceano non riesce a rispondere completamente e l'effetto è attenuato. Modelli dinamici oceanici possono fornire correzioni più accurate che tengono conto della risposta dinamica completa dell'oceano alle forzanti atmosferiche.

## Altimetria Laser da Satellite e Applicazioni alle Superfici di Ghiaccio

L'altimetria laser satellitare utilizza impulsi laser estremamente brevi (nanosecondo) per misurare distanze con precisione centimetrica. A differenza del radar che ha footprint di

chilometri, il laser ha footprint di decine di metri, fornendo risoluzione spaziale molto superiore. Tuttavia, il laser non penetra le nubi, limitando la copertura temporale in regioni nuvolose.

La missione ICESat (Ice, Cloud, and land Elevation Satellite), operata dalla NASA dal 2003 al 2009, utilizzava un altimetro laser con lunghezza d'onda di 1.064 nanometri (infrarosso vicino) e frequenza di ripetizione di quaranta impulsi al secondo. Ciascun impulso illuminava un footprint di circa settanta metri di diametro sulla superficie, con spaziatura lungo-traccia di circa centosettanta metri. La precisione verticale era di due-tre centimetri per misurazioni individuali su superfici piatte, migliorando a pochi millimetri per medie su distanze di chilometri.

ICESat è stata progettata principalmente per misurare le variazioni temporali dello spessore delle calotte polari in Groenlandia e Antartide, un obiettivo per il quale l'alta precisione verticale e la risoluzione spaziale fine sono essenziali. Tuttavia, i dati ICESat sono stati utilizzati anche per applicazioni geodetiche, inclusa la validazione di modelli geoidali e l'determinazione di profili di elevazione precisi per infrastrutture di riferimento verticale.

Il successore ICESat-2, lanciato nel 2018, utilizza una tecnologia laser molto più avanzata: un sistema di fotorilevamento laser (lidar) con sei beam paralleli e frequenza di ripetizione di diecimila impulsi al secondo per beam. Ciascun beam ha footprint di circa diciassette metri. Invece di misurare il tempo di ritorno di impulsi di ampiezza finita, ICESat-2 conta singoli fotoni riflessi utilizzando rivelatori estremamente sensibili, un approccio che permette di usare energia laser molto minore (importante per longevità della missione) mantenendo precisione eccellente.

La sfida con il conteggio di singoli fotoni è distinguere i fotoni di segnale (riflessi dalla superficie di interesse) dai fotoni di rumore (luce solare diffusa, luce residua del laser, rumore del rivelatore). ICESat-2 utilizza algoritmi sofisticati che identificano cluster di fotoni che sono statisticamente improbabili essere rumore, determinando così la superficie. La precisione verticale media è di pochi centimetri anche con questo approccio a conteggio di fotoni.

Su superfici oceaniche, l'altimetria laser è complicata dalla rugosità delle onde. Mentre il radar misura un'altezza media integrata sul footprint di chilometri, il laser vede solo la superficie istantanea in un punto piccolo. Per oceani con onde, le misurazioni laser individuali mostrano variabilità di metri dovuta alle onde. Per estrarre l'altezza media del livello del mare da dati laser, è necessario mediare su molte misurazioni (tipicamente qualche centinaio di impulsi, corrispondenti a decine di chilometri lungo-traccia).

Un vantaggio dell'altimetria laser su oceano è la capacità di operare vicino alle coste dove l'altimetria radar soffre di contaminazione da terra nel footprint. Il footprint laser piccolo permette misurazioni valide fino a poche centinaia di metri dalla costa, migliorando drammaticamente la copertura in zone costiere cruciali per molte applicazioni.

## Tecniche di Elaborazione Avanzata: Retracking, Delay-Doppler Altimetry, e Interferometria

Il retracking è una classe di tecniche avanzate di elaborazione del waveform altimetrico che rianalizzano i dati grezzi per estrarre stime di range più accurate di quelle fornite dal processamento standard a bordo del satellite. L'idea è che il processamento a bordo utilizza algoritmi generici e parametri conservativi per garantire robustezza in tutte le condizioni, ma per applicazioni specifiche, algoritmi specializzati applicati a terra possono ottenere migliori risultati.

Algoritmi di retracking possono essere classificati in due categorie: fisici e empirici. Gli algoritmi fisici utilizzano modelli teorici del waveform (come il modello di Brown modificato) e fittano questi modelli ai dati osservati con tecniche di ottimizzazione robuste. Parametri addizionali o raffinamenti del modello (per esempio, tenendo conto della forma reale dell'antenna, o di deviazioni dalla gaussianità della distribuzione delle altezze superficiali) possono migliorare il fit.

Gli algoritmi empirici utilizzano caratteristiche del waveform (come la posizione del punto a metà potenza, o threshold methods) senza riferimento esplicito a un modello fisico. Questi sono tipicamente più veloci ma possono essere meno accurati o meno robusti in condizioni non standard.

Il retracking è particolarmente importante in regioni costiere, su ghiaccio marino, e su superfici terrestri dove il waveform si discosta significativamente dal modello oceanico standard. Per esempio, su ghiaccio marino con floes e lead (aperture d'acqua tra i ghiacci), il waveform può mostrare picchi multipli corrispondenti a riflessioni da superfici a diverse altezze. Algoritmi di retracking specializzati possono identificare questi picchi e stimare separatamente le altezze del ghiaccio e dei lead.

La delay-Doppler altimetry, anche chiamata SAR (Synthetic Aperture Radar) altimetry, rappresenta un'innovazione tecnologica significativa che migliora drammaticamente la risoluzione lungo-traccia dell'altimetria. L'altimetria convenzionale (pulse-limited) ha footprint circolare di diversi chilometri, limitando la risoluzione lungo-traccia anche se il satellite si muove velocemente (circa sette chilometri al secondo).

L'altimetria SAR sfrutta l'effetto Doppler causato dal movimento del satellite. I riflettori sulla superficie oceanica dentro il beam dell'antenna hanno diverse velocità radiali relative al satellite a causa della geometria, producendo spostamenti Doppler diversi. Registrando le serie temporali del segnale di ritorno (i burst) e applicando un'analisi Doppler (mediante FFT), si può suddividere il footprint grande in sottofootprint più piccoli lungo-traccia, ciascuno con un range specifico di frequenze Doppler.

Questo processo, analogo alla sintesi di apertura nei radar di imaging, riduce il footprint effettivo lungo-traccia da diversi chilometri a qualche centinaio di metri, migliorando la risoluzione di un ordine di grandezza. L'ampiezza del footprint cross-traccia rimane invariata (determinata dalla larghezza del beam dell'antenna), ma la risoluzione complessiva è significativamente migliorata.

Il satellite Sentinel-3, operato dall'Agenzia Spaziale Europea, include un altimetro SAR che opera in modalità dual: SAR ad alta risoluzione per regioni selezionate (coste, ghiacci) e modalità convenzionale per oceano aperto. Il satellite CryoSat-2, lanciato nel 2010, utilizza

altimetria SAR/interferometrica (SARIn) specificamente progettata per misurare lo spessore del ghiaccio marino e delle calotte polari su topografia inclinata.

Nella modalità SARIn, due antenne riceventi separate (baseline di qualche metro) ricevono simultaneamente il segnale riflesso, permettendo di determinare l'angolo di arrivo del segnale mediante interferometria. Questo permette di localizzare la posizione della riflessione cross-traccia, cruciale su superfici inclinate dove la riflessione più forte non proviene necessariamente dal nadir ma da pendii inclinati verso il satellite (effetto di slope-induced error).

La slope-induced error è particolarmente severa su calotte glaciali con pendenze significative. Senza correzione, l'altimetro misura l'altezza di un punto lateralmente spostato rispetto al nadir, introducendo errori che possono raggiungere decine di metri in regioni con topografia complessa. L'interferometria permette di correggere questo errore rilocando la riflessione nella posizione corretta.

## Determinazione del Geoide Marino da Altimetria e Separazione della Topografia Dinamica

La determinazione del geoide sull'oceano da dati altimetrici procede attraverso la relazione fondamentale SSH = N + η, dove SSH è l'altezza della superficie oceanica misurata dall'altimetro (dopo tutte le correzioni discusse), N è l'ondulazione geoidale, e η è la topografia dinamica oceanica. Il problema è che sia N che η sono incognite, e le misurazioni altimetriche da sole non possono separare i due contributi.

La strategia classica consiste nell'utilizzare la media temporale di lungo periodo (tipicamente parecchi anni) delle misurazioni altimetriche per approssimare N + η_mean, dove η_mean è la topografia dinamica media. Su scale temporali lunghe, molte variazioni oceanografiche (maree, onde, variabilità stagionale) si mediano via, lasciando principalmente il segnale geoidale più la circolazione oceanica quasi-stazionaria. Tuttavia, η_mean non è zero: la circolazione oceanica media (correnti come il Gulf Stream) produce topografia dinamica permanente di uno-due metri.

Per estrarre il geoide puro, si devono utilizzare modelli della circolazione oceanica o stime indipendenti di η_mean. I modelli oceanici numerici (Ocean General Circulation Models, OGCM) simulano la circolazione tridimensionale degli oceani sotto forzanti atmosferiche (vento, flussi di calore e di acqua dolce) e possono fornire stime di η_mean. Alternativamente, si può utilizzare un modello geoidale derivato da dati gravimetrici indipendenti (satellitari come GRACE/GOCE e terrestri), assumendo che questo catturi accuratamente N, e sottrarre questo dalle medie altimetriche per ottenere η_mean.

Un approccio iterativo combina entrambe le sorgenti di informazione. Si inizia con un modello geoidale gravitazionale preliminare N_0, si calcola η_mean = SSH_mean - N_0, si utilizzano vincoli oceanografici (per esempio, che la circolazione geostr ofica derivata da η_mean sia compatibile con osservazioni di correnti, temperatura, salinità), si aggiusta il modello geoidale per migliorare la compatibilità, e si itera fino a convergenza.

La moderna approccio sfrutta il fatto che le variazioni temporali della SSH sono quasi interamente oceanografiche (il geoide varia molto lentamente, su scale temporali di anni o

decenni), mentre la media di lungo periodo contiene principalmente il segnale geoidale. Quindi, utilizzando modelli geoidali ad alta precisione da GRACE e GOCE per vincolare le strutture a lunghezza d'onda intermedia (cento-mille chilometri), e utilizzando l'altimetria per le strutture a lunghezza d'onda corta (sotto cento chilometri), si può ottenere una separazione ottimale.

I modelli di topografia dinamica media derivati da questa separazione hanno rivoluzionato l'oceanografia. Mappe globali ad alta risoluzione di η_mean mostrano dettagli straordinari della circolazione oceanica: le correnti di confine occidentale intense come il Gulf Stream e la Kuroshio, le correnti circumpolari come la Antarctic Circumpolar Current, i sistemi di gyre subtropicali e subpolari in ciascun bacino oceanico, e strutture mesoscala come vortici persistenti.

La topografia dinamica è direttamente correlata alla circolazione geostr ofica mediante le equazioni $u = -(g/f)\ \partial\eta/\partial y$, $v = (g/f)\ \partial\eta/\partial x$, dove u e v sono le componenti della velocità orizzontale, g l'accelerazione di gravità, f il parametro di Coriolis, e x, y le coordinate est e nord. Quindi, le mappe di η_mean si traducono immediatamente in mappe della circolazione oceanica superficiale, che possono essere validate con osservazioni indipendenti da drifter, boe, e misurazioni acustiche di corrente.

Un risultato significativo è la scoperta che la topografia dinamica oceanica ha variazioni regionali sorprendentemente grandi. Il Pacifico occidentale tropicale ha η significativamente più alto (di circa mezzo metro) rispetto al Pacifico orientale, riflettendo l'accumulo di acqua calda superficiale spinta dai venti alisei verso ovest. Durante eventi El Niño, questo gradiente si riduce drasticamente quando gli alisei si indeboliscono e l'acqua calda si sposta verso est, un fenomeno chiaramente visibile nelle serie temporali altimetriche.

## Variazioni del Livello del Mare e Monitoraggio del Cambiamento Climatico

Una delle applicazioni più importanti dell'altimetria satellitare è il monitoraggio delle variazioni del livello medio globale del mare (Global Mean Sea Level, GMSL) e delle sue variazioni regionali. Le serie temporali altimetriche continue dal 1993 (inizio della missione TOPEX/Poseidon) forniscono un record senza precedenti dell'innalzamento del livello del mare, un indicatore chiave del cambiamento climatico.

Il livello medio globale del mare è aumentato a una velocità media di circa 3,3 millimetri all'anno dal 1993, con evidenza di un'accelerazione negli anni più recenti (la velocità era circa 2,0 mm/anno nei primi dieci anni, aumentando a circa 4,0 mm/anno nell'ultima decade). Questo innalzamento è causato principalmente da due fattori: l'espansione termica degli oceani (l'acqua si espande quando si riscalda) e l'aggiunta di massa agli oceani dallo scioglimento di ghiacci terrestri (calotte polari, ghiacciai montani).

La separazione di questi due contributi è possibile combinando altimetria con misurazioni gravimetriche da GRACE. L'altimetria misura le variazioni di volume (espansione termica più aggiunta di massa), mentre GRACE misura solo le variazioni di massa. La differenza tra le due fornisce una stima della componente termostatica (expansion termica). Studi hanno

mostrato che nel periodo 2005-2015, circa il 40% dell'innalzamento osservato era dovuto a espansione termica e circa il 60% ad aggiunta di massa.

Le variazioni del livello del mare non sono uniformi geograficamente. Pattern regionali complessi mostrano che alcune regioni sperimentano innalzamenti molto maggiori della media globale (fino a dieci-quindici millimetri all'anno in parti del Pacifico occidentale tropicale), mentre altre regioni mostrano innalzamenti minori o addirittura abbassamenti locali. Questi pattern sono causati da variazioni nella circolazione oceanica, da cambiamenti nei venti che redistribuiscono massa oceanica, da variazioni nella salinità, e da effetti gravitazionali dovuti alla redistribuzione di massa dai ghiacci terrestri.

Gli effetti gravitazionali dello scioglimento dei ghiacci sono particolarmente interessanti. Quando una calotta glaciale perde massa, il suo campo gravitazionale locale si indebolisce, riducendo l'attrazione dell'acqua oceanica verso quella regione. Paradossalmente, il livello del mare vicino alla calotta in scioglimento diminuisce (o aumenta meno della media), mentre regioni lontane sperimentano aumenti maggiori della media. Questo effetto, insieme all'aggiustamento isostatico della crosta sotto la calotta che si alleggerisce, produce un pattern caratteristico di variazione del livello del mare che può essere calcolato usando la teoria gravitazionale e confrontato con osservazioni.

Le serie temporali altimetriche mostrano anche variabilità su scala inter-annuale e decadale associata a modi di variabilità climatica naturale come El Niño-Southern Oscillation (ENSO), Pacific Decadal Oscillation (PDO), e Atlantic Multidecadal Oscillation (AMO). Durante eventi El Niño forti, il livello medio globale del mare può aumentare temporaneamente di cinque-dieci millimetri a causa di espansione termica aumentata e redistribuzione di calore oceanico. Identificare e separare questi segnali di variabilità naturale dal trend di lungo termine dovuto al riscaldamento antropogenico è una sfida scientifica significativa che richiede analisi statistiche sofisticate e modellazione numerica.

## Altimetria in Regioni Polari e sulle Superfici Ghiacciate

L'applicazione dell'altimetria alle regioni polari presenta sfide uniche dovute alle proprietà peculiari delle superfici ghiacciate e alle condizioni ambientali estreme. Su calotte glaciali, ghiacciai e ghiaccio marino, la superficie riflettente non è l'oceano liquido ma una superficie solida con proprietà dielettriche diverse, topografia complessa, e possibili strati di neve con densità variabile.

Su calotte glaciali come Groenlandia e Antartide, l'altimetria misura l'elevazione della superficie di neve/ghiaccio. Le variazioni temporali di questa elevazione sono causate da: accumulo di neve (aumenta l'elevazione), compattazione della neve sottostante a ghiaccio (diminuisce l'elevazione), flusso del ghiaccio verso i margini (cambia l'elevazione a seconda del bilancio tra accumulo locale e divergenza del flusso), e fusione superficiale o basale (diminuisce l'elevazione).

Per determinare il bilancio di massa della calotta (la differenza tra accumulo e perdita), è necessario separare le variazioni di elevazione in contributi volumetrici (che indicano variazioni di massa) e contributi densità (variazioni nella densità della colonna di firn, la neve parzialmente compattata sopra il ghiaccio solido). Questo richiede modelli del firn che

simulano i processi di compattazione sotto il peso sovrastante e il riscaldamento da radiazione solare e conduzione termica.

L'altimetria radar su calotte glaciali è complicata dal fatto che il segnale radar penetra la neve per diversi metri prima di essere riflesso, con profondità di penetrazione che dipende dalla frequenza radar, dalla densità e stratigrafia della neve, e dal contenuto di acqua liquida (la neve bagnata assorbe fortemente il radar). Questo significa che l'altimetria radar misura una "altezza radar" che è qualche metro sotto la vera superficie, con variazioni spaziali e temporali che dipendono dalle proprietà della neve.

L'altimetria laser non ha questo problema di penetrazione (il laser infrarosso è riflesso dalla vera superficie fisica della neve), ma ha il problema opposto di essere influenzato da variazioni nella rugosità superficiale della neve (sastrugi, dunas di neve formati dal vento) che possono avere ampiezze di decimetri su scale di metri. La combinazione di dati radar e laser permette in principio di separare effetti di penetrazione radar da variazioni reali di elevazione.

Su ghiaccio marino, l'obiettivo principale dell'altimetria è determinare lo spessore del ghiaccio, una variabile cruciale per studi climatici (lo spessore del ghiaccio marino artico è diminuito drasticamente negli ultimi decenni) e per applicazioni operative (navigazione in acque polari). Tuttavia, l'altimetria misura direttamente solo la quota del ghiaccio sopra il livello del mare (freeboard), non lo spessore totale.

Lo spessore del ghiaccio può essere dedotto dal freeboard usando il principio di Archimede: un blocco di ghiaccio galleggiante ha freeboard $F = h\,(1 - \rho_{ice}/\rho_{water})$, dove $h$ è lo spessore totale, $\rho_{ice}$ la densità del ghiaccio (circa 915 kg/m³) e $\rho_{water}$ la densità dell'acqua di mare (circa 1.027 kg/m³). Invertendo, $h = F / (1 - \rho_{ice}/\rho_{water}) \approx F / 0{,}11 \approx 9\,F$. Quindi, per determinare spessore con accuratezza di decimetri, il freeboard deve essere misurato con accuratezza di circa un centimetro, una sfida considerevole.

Inoltre, il ghiaccio marino è tipicamente coperto da neve con spessore variabile (zero a cinquanta centimetri), e l'altimetria può misurare la superficie della neve piuttosto che l'interfaccia neve-ghiaccio. Lo spessore di neve deve essere stimato da modelli o da osservazioni ausiliarie (per esempio, radar a doppia frequenza che penetra diversamente nella neve vs ghiaccio) per correggere il freeboard misurato.

Il ghiaccio marino è anche molto eterogeneo, con una distribuzione di floes (pannelli di ghiaccio) separati da lead (fessure di acqua aperta o ghiaccio molto sottile). Le riflessioni altimetriche dai lead forniscono una riferimento per il livello del mare locale, che può poi essere usato per calcolare il freeboard delle floes adiacenti. Algoritmi di identificazione dei lead nelle tracce altimetriche utilizzano caratteristiche del waveform (lead producono picchi stretti e intensi, floes producono waveform più diffusi) per classificare ciascuna misura.

La missione CryoSat-2, con il suo altimetro SAR/interferometrico, ha fornito le prime misurazioni sistematiche dello spessore del ghiaccio marino artico su scala bacinale con sufficiente accuratezza e risoluzione spaziale per studi climatici. I risultati hanno confermato e quantificato la riduzione drammatica dello spessore medio del ghiaccio marino artico, da circa 3,6 metri negli anni ottanta a circa 2,0 metri negli anni recenti, una riduzione di oltre il quaranta % in tre decenni.

# Geoide e Ondulazioni Geoidali - Parte XI

## Sistemi di Riferimento Verticali Globali, Unificazione dei Datum Nazionali e Applicazioni Avanzate nella Geodesia del Ventunesimo Secolo

### Il Problema della Frammentazione dei Datum Verticali e la Necessità di Unificazione Globale

Uno dei problemi pratici più significativi nella geodesia applicata moderna è la frammentazione dei sistemi di riferimento verticali a livello globale. Mentre il posizionamento orizzontale è stato efficacemente unificato attraverso sistemi di riferimento geocentrici realizzati mediante reti di stazioni GPS permanenti (come l'International Terrestrial Reference Frame, ITRF), il posizionamento verticale rimane frammentato in decine di sistemi nazionali o regionali incompatibili tra loro.

La ragione fondamentale di questa frammentazione risiede nella definizione tradizionale dei sistemi di altezze basata su mareografi locali. Storicamente, ciascuna nazione ha stabilito il proprio datum verticale scegliendo un mareografo specifico e definendo il suo livello medio del mare di lungo periodo come quota zero. Le altezze ortometriche su tutto il territorio nazionale sono poi determinate mediante reti di livellazione geometrica che partono dal mareografo e si propagano attraverso il paese lungo linee di livellazione, con capisaldi monumentati a intervalli regolari.

Il problema è che il livello medio del mare non è uniforme globalmente a causa della topografia dinamica oceanica discussa precedentemente. Mareografi in diverse località misurano livelli medi che differiscono di uno-due metri a causa di differenze nella circolazione oceanica, nella temperatura e salinità dell'acqua, e in effetti geodinamici locali. Di conseguenza, i datum verticali definiti da diversi mareografi sono intrinsecamente incompatibili: uno stesso punto fisico avrà altezze ortometriche diverse nei diversi sistemi.

Questa incompatibilità non è semplicemente un offset costante tra sistemi (che potrebbe essere facilmente corretto) ma coinvolge deformazioni complesse che variano spazialmente. Quando reti di livellazione di due paesi adiacenti vengono connesse attraverso il confine, tipicamente si trovano discrepanze che non sono costanti ma che variano lungo il confine, riflettendo l'accumulo di errori sistematici nelle livellazioni e le diverse scelte di datum.

L'avvento del GPS ha reso questa situazione ancora più problematica. Un utente con un ricevitore GPS ottiene un'altezza ellissoidica h nel sistema geocentrico globale WGS84 (o ITRF). Per convertire questa altezza in una altezza ortometrica H nel sistema nazionale locale, è necessario sottrarre l'ondulazione geoidale: H = h - N. Ma il valore di N dipende dal datum verticale: $N_{datum_A} \neq N_{datum_B}$ se i due datum hanno origini diverse.

Questo significa che, per utilizzare GPS per determinazioni altimetriche pratiche, è necessario disporre di un modello geoidale "adattato" al datum verticale locale specifico.

Molti paesi hanno sviluppato tali modelli geoidali nazionali mediante fitting di un modello geoidale gravitazionale globale a una rete di punti di controllo GPS/livellazione nel loro territorio. Ma questi modelli adattati non sono consistenti tra paesi, perpetuando la frammentazione.

La conseguenza pratica di questa frammentazione è significativa. Progetti di ingegneria transfrontaliera (ponti, tunnel, condotte, linee ferroviarie ad alta velocità) richiedono un sistema di altezze comune su entrambi i lati del confine. Studi scientifici che confrontano livelli di acqua di fiumi o laghi transfrontalieri, o che monitorano deformazioni tettoniche attraverso regioni multiple, sono complicati dalla necessità di trasformare tra sistemi incompatibili. Applicazioni di navigazione automobilistica e aerea richiedono altezze consistenti globalmente.

## L'International Height Reference System (IHRS) e la Sua Realizzazione

In risposta a questa problematica, l'Associazione Internazionale di Geodesia (International Association of Geodesy, IAG) ha adottato nel 2015 la risoluzione che stabilisce l'International Height Reference System (IHRS), un sistema di riferimento verticale globalmente unificato basato sul potenziale gravitazionale piuttosto che su mareografi locali. L'IHRS rappresenta un cambio di paradigma fondamentale nella definizione di altezze.

Il principio dell'IHRS è che le altezze non sono definite come distanze geometriche ma come numeri geopotenziali, ovvero differenze di potenziale gravitazionale rispetto a una superficie equipotenziale di riferimento globale. Formalmente, l'IHRS definisce un valore di potenziale di riferimento $W_0$ che corrisponde approssimativamente al livello medio globale degli oceani, e assegna a ciascun punto P un'altezza geopotenziale $C_P = W_0 - W_P$, dove $W_P$ è il potenziale gravitazionale reale nel punto P.

L'altezza geopotenziale C ha dimensioni di energia per unità di massa (joule per chilogrammo, equivalente a $m^2/s^2$). Per convertirla in una lunghezza che sia intuitivamente comprensibile, si divide per una gravità di riferimento $\gamma_0$ (tipicamente il valore di gravità normale all'equatore, $\gamma_0 \approx 9{,}806$ $m/s^2$), ottenendo un'altezza convenzionale $H = C / \gamma_0$. Questa è essenzialmente l'altezza ortometrica, con la differenza che è definita rispetto a un potenziale di riferimento globale $W_0$ piuttosto che rispetto al livello medio di un mareografo locale.

La realizzazione pratica dell'IHRS, chiamata International Height Reference Frame (IHRF), consiste in una rete di stazioni di riferimento distribuite globalmente dove il potenziale gravitazionale W è stato determinato con alta accuratezza. Queste stazioni devono avere: coordinate geocentriche tridimensionali accurate (da GPS o GNSS), misurazioni gravimetriche locali di alta precisione, e connessioni alla rete di livellazione nazionale (se esistente) per permettere la trasformazione tra il nuovo sistema e i sistemi nazionali esistenti.

La determinazione del potenziale W in una stazione richiede l'integrazione della gravità lungo un percorso dal geoide di riferimento (la superficie equipotenziale con potenziale $W_0$) alla stazione. Questa integrazione può essere effettuata mediante diverse tecniche. Il metodo classico utilizza livellazioni geometriche combinate con misurazioni gravimetriche lungo la linea di livellazione. Il numero geopotenziale è $C = \int g \, dh$, dove l'integrale è

calcolato lungo la livellazione dall'origine (il geoide di riferimento, approssimato dal livello medio di un mareografo) alla stazione, e g è la gravità misurata lungo il percorso.

Un metodo moderno alternativo utilizza cronometria geodetica: due orologi atomici identici posti a potenziali gravitazionali diversi camminano a velocità diverse a causa dell'effetto relativistico discusso precedentemente. La differenza di frequenza relativa $\Delta f/f = \Delta W/c^2$ permette di determinare la differenza di potenziale $\Delta W = W_2 - W_1 = c^2 (\Delta f/f)$ direttamente dal confronto delle frequenze degli orologi. Con orologi ottici moderni che hanno stabilità migliore di $10^{-18}$, differenze di potenziale corrispondenti a differenze di altezza di un centimetro ($\Delta W \approx 0{,}1$ m²/s²) sono misurabili.

Il valore del potenziale di riferimento $W_0$ è stato determinato mediante analisi di dati altimetrici, gravimetrici e mareografici globali. Studi pubblicati tra il 2010 e il 2020 hanno converguto su un valore $W_0 = 62.636.853{,}4 \pm 0{,}2$ m²/s², che corrisponde a una superficie equipotenziale che passa approssimativamente per il livello medio globale degli oceani nell'epoca di riferimento 2000-2010. Questo valore è stato adottato come standard nell'IHRS.

La connessione tra IHRS e sistemi di altezze nazionali esistenti richiede la determinazione di parametri di trasformazione, tipicamente rappresentati come un offset costante più un modello di distorsione spazialmente variabile. Se $N_{IHRS}$ è l'ondulazione geoidale rispetto al potenziale di riferimento $W_0$, e $N_{local}$ è l'ondulazione rispetto al datum locale, la relazione è $N_{local} = N_{IHRS} + \Delta N$, dove $\Delta N$ è una funzione di correzione spazialmente variabile che può essere determinata da una rete di punti GPS/livellazione.

Il $\Delta N$ tipicamente varia da pochi decimetri a oltre un metro tra differenti datum nazionali, con gradienti che possono raggiungere diversi centimetri per cento chilometri in alcuni casi. La determinazione accurata di $\Delta N$ su tutto il territorio di una nazione richiede una rete densa di punti GPS/livellazione di alta qualità, un investimento significativo che molti paesi stanno attualmente realizzando.

## Modernizzazione delle Reti di Livellazione e Integrazione GNSS

La transizione verso l'IHRS e l'integrazione del posizionamento GNSS nelle pratiche geodetiche operative richiedono la modernizzazione delle reti di livellazione tradizionali. Le reti di livellazione classiche, costruite mediante campagne di livellazione geometrica estese su decenni, soffrono di diversi problemi che limitano la loro accuratezza e utilità nel contesto moderno.

Il primo problema è l'accumulo di errori sistematici. La livellazione geometrica ha precisioni eccellenti su distanze brevi (dell'ordine di ±1 mm per chilometro di doppia livellazione), ma questi piccoli errori si accumulano su distanze lunghe. Su percorsi di centinaia o migliaia di chilometri, gli errori accumulati possono raggiungere decimetri. Inoltre, errori sistematici legati a refrazione atmosferica (la rifrazione verticale causa errori nelle mire del livello che variano con le condizioni atmosferiche), verticalità imperfetta dello strumento, e subsidenza dei capisaldi si propagano attraverso la rete in modi complessi.

Il secondo problema è la variazione temporale delle altezze dovuta a processi geodinamici. Movimenti tettonici, subsidenza indotta da estrazione di acque sotterranee o idrocarburi,

recupero post-glaciale isostatico, e variazioni del carico sedimentario in delta fluviali causano cambiamenti reali delle altezze nel tempo. Una rete di livellazione misurata in epoche diverse (come tipicamente accade quando diverse campagne sono eseguite in anni o decenni differenti) cattura un'istantanea mista di altezze in diverse epoche, rendendo la rete internamente inconsistente.

Il terzo problema è l'accessibilità e il costo del mantenimento. I capisaldi di livellazione richiedono monumentazione permanente e devono essere visitati periodicamente per verificarne la stabilità. In regioni remote, montuose o con infrastrutture limitate, la densità di capisaldi è inevitabilmente scarsa. Il costo di campagne di ri-livellazione per aggiornare la rete è proibitivo, specialmente per paesi in via di sviluppo con risorse geodetiche limitate.

L'integrazione del GNSS offre soluzioni a molti di questi problemi. Il posizionamento GNSS fornisce coordinate tridimensionali (inclusa altezza ellissoidica) con precisioni millimetriche mediante tecniche differenziali (Real-Time Kinematic, RTK, o Post-Processed Kinematic, PPK) o centimetriche mediante Precise Point Positioning (PPP) utilizzando correzioni orbitali e di orologio precise. Queste misurazioni sono dirette, non richiedono collegamenti sequenziali attraverso reti, e sono riferite a un sistema geocentrico globale unificato.

Per convertire altezze ellissoidiche GNSS in altezze ortometriche nel sistema IHRS, si richiede un modello geoidale accurato: $H = h - N$. La disponibilità di modelli geoidali globali come EGM2008 e dei suoi successori, combinati con modelli regionali raffinati, permette questa conversione con accuratezze che in molte regioni sono competitive con la livellazione geometrica tradizionale (due-cinque centimetri).

Le reti geodetiche nazionali moderne stanno quindi adottando un approccio ibrido: una rete relativamente sparsa di stazioni GNSS permanenti (CORS, Continuously Operating Reference Stations) che forniscono un framework di riferimento tridimensionale stabile e accessibile continuamente; un modello geoidale regionale accurato derivato da dati gravimetrici, GNSS/livellazione e modelli globali; e procedure standardizzate per utenti che devono determinare altezze ortometriche usando ricevitori GNSS.

Questo approccio ha vantaggi significativi. Riduce la necessità di costose campagne di livellazione di ri-misurazione. Fornisce un framework di riferimento internamente consistente che è aggiornato continuamente mediante le stazioni CORS. Permette densificazione locale flessibile: un utente può densificare la rete in una regione specifica misurando punti aggiuntivi con GNSS senza dover connettere fisicamente alla rete di livellazione esistente. E fornisce un percorso naturale verso l'adozione dell'IHRS come sistema di riferimento unificato.

Tuttavia, ci sono anche sfide. La precisione delle altezze GNSS/geoidali dipende criticamente dall'accuratezza del modello geoidale, che varia geograficamente. In regioni con copertura gravimetrica densa e topografia moderata, accuratezze di due-tre centimetri sono raggiungibili. In regioni montuose con topografia complessa, gravimetria scarsa, o geologia inusuale, le incertezze possono raggiungere dieci-venti centimetri, insufficienti per molte applicazioni di ingegneria che richiedono precisione centimetrica o sub-centimetrica.

Un'altra sfida è la necessità di educazione e addestramento degli utenti. La transizione da procedure di livellazione tradizionali a procedure basate su GNSS richiede che gli operatori

comprendano concetti come altezze ellissoidiche vs ortometriche, ondulazioni geoidali, datum verticali, e l'uso corretto dei modelli geoidali. Errori di applicazione (per esempio, utilizzare il modello geoidale sbagliato, o interpretare incorrettamente quale datum verticale è rilevante) possono portare a errori significativi.

## Applicazioni dell'IHRS in Progetti Transnazionali e Grandi Infrastrutture

L'adozione progressiva dell'IHRS sta abilitando progetti di ingegneria e scientifici su scale continentali o globali che erano precedentemente complicati o impossibili a causa dell'incompatibilità dei datum verticali. Alcuni esempi illustrano l'impatto pratico di questa transizione.

Il progetto Tunnel ferroviario del San Gottardo in Svizzera, con cinquantasette chilometri di lunghezza scavato attraverso le Alpi, ha richiesto allineamento verticale con precisione centimetrica per garantire che le due squadre di scavo che partivano da estremità opposte si incontrassero correttamente nel mezzo. Questo è stato realizzato mediante una combinazione di livellazione geometrica di altissima precisione, misurazioni gravimetriche dettagliate per modellare correttamente il campo gravitazionale variabile attraverso la montagna, e GNSS per connessione al sistema di riferimento globale. L'incontro finale delle due gallerie ha avuto un disallineamento verticale di soli otto centimetri su una distanza di quasi sessanta chilometri, una testimonianza della geodesia moderna.

La rete ferroviaria europea ad alta velocità, che connette città da Londra a Roma, da Parigi a Berlino, richiede compatibilità delle altezze attraverso confini nazionali per garantire transizioni fluide e per la progettazione di sistemi di segnalamento e controllo che dipendono da informazioni accurate di pendenza e elevazione. L'armonizzazione dei sistemi di altezze nazionali europei verso un sistema comune basato su European Vertical Reference System (EVRS, che è compatibile con IHRS) è stata essenziale per il successo di questa rete.

Progetti idrologici su bacini fluviali transnazionali richiedono altezze consistenti per modellazione del flusso d'acqua, che naturalmente segue le superfici equipotenziali. Il Danubio, che attraversa dieci paesi, ha beneficiato di sforzi di unificazione geodetica che hanno armonizzato i diversi datum verticali nazionali verso un sistema comune, migliorando la capacità di previsione di inondazioni e la gestione coordinata delle risorse idriche.

Il progetto Integrated Marine Observing System in Australia utilizza mareografi distribuiti lungo le migliaia di chilometri di costa australiana per monitorare variazioni del livello del mare. La connessione di questi mareografi a un datum verticale comune mediante GNSS e modelli geoidali accurati permette di distinguere innalzamenti eustetici globali (dovuti al cambiamento climatico) da movimenti verticali locali della crosta (dovuti a tettonica o subsidenza), una distinzione cruciale per la pianificazione costiera e le politiche di adattamento climatico.

## Cronometria Geodetica e Orologi Atomici Ottici per Geodesia di Precisione Estrema

Una delle frontiere più affascinanti della geodesia moderna è l'applicazione della cronometria atomica ultra-precisa per determinazioni altimetriche e geoidali. Come discusso

precedentemente, la relatività generale predice che orologi a potenziali gravitazionali diversi camminano a velocità diverse, con una differenza di frequenza relativa $\Delta f/f = \Delta W/c^2$ dove $\Delta W = W_2 - W_1$ è la differenza di potenziale tra i due orologi.

Gli orologi atomici ottici rappresentano la frontiera della precisione temporale. Questi dispositivi utilizzano transizioni elettroniche negli atomi (tipicamente atomi di stronzio, itterbio, o alluminio ionizzato) come riferimento di frequenza, e hanno raggiunto stabilità di frequenza di circa $10^{-18}$ o migliore. A questo livello di precisione, un orologio può distinguere differenze di potenziale corrispondenti a differenze di altezza di circa un centimetro su scale temporali di alcune ore di integrazione.

Questo apre la possibilità di una definizione cronometrica di altezze: due punti sono alla stessa altezza (ovvero sulla stessa superficie equipotenziale) se orologi identici in quei punti hanno esattamente la stessa frequenza. Questa definizione ha vantaggi concettuali e pratici rispetto alle definizioni geometriche tradizionali. È basata su una proprietà fisica direttamente misurabile (frequenza) piuttosto che su integrazioni di gravità che accumulano errori. È consistente per definizione con la natura fisica del campo gravitazionale (superfici equipotenziali). E promette precisioni finali che potrebbero superare quelle raggiungibili con metodi tradizionali.

Esperimenti pionieristici di cronometria geodetica sono stati condotti in diversi paesi. In un esperimento in Giappone, due orologi ottici al stronzio sono stati comparati: uno presso l'Università di Tokyo (elevazione circa trenta metri sopra il livello del mare) e uno presso l'Istituto Nazionale di Tecnologia e Standard (NIST) in una località con elevazione diversa. La connessione tra i due orologi è stata realizzata mediante fibra ottica che trasmetteva il segnale di riferimento. Dopo integrazione di diverse ore, la differenza di frequenza è stata misurata con incertezza di circa $10^{-18}$, corrispondente a incertezza nella differenza di potenziale (e quindi di altezza) di circa un centimetro.

In Germania, un progetto ambizioso prevede la creazione di una rete di orologi ottici distribuiti sul territorio nazionale, connessi mediante fibra ottica in una "rete cronometrica". Questa rete servirebbe simultaneamente come standard di tempo ultra-preciso (importante per telecomunicazioni, navigazione, mercati finanziari) e come infrastruttura geodetica per il sistema di riferimento verticale. Confronti continui tra gli orologi fornirebbero monitoraggio in tempo reale delle differenze di potenziale, permettendo di rilevare anche cambiamenti temporali dovuti a processi geodinamici o idrologici.

Una applicazione particolarmente interessante della cronometria geodetica è il monitoraggio di variazioni temporali del potenziale gravitazionale causate da redistribuzioni di massa. Variazioni stagionali nell'immagazzinamento di acqua sotterranea, accumulo e fusione di neve, o movimenti di magma sotto vulcani attivi causano variazioni misurabili del potenziale che potrebbero essere rilevate mediante confronti cronometrici. Questo fornirebbe un complemento terrestre alle osservazioni gravimetriche satellitari come GRACE, con risoluzione temporale potenzialmente molto superiore (continuativa vs mensile) e sensibilità a fenomeni molto localizzati.

Tuttavia, la cronometria geodetica come tecnologia operativa è ancora agli inizi. Gli orologi ottici sono attualmente strumenti di laboratorio complessi che richiedono controllo ambientale meticoloso, operatori specializzati, e investimenti di capitale significativi. La loro

trasformazione in strumenti robusti, trasportabili e operabili da personale geodetico standard richiederà progressi ingegneristici sostanziali. Inoltre, la connessione di orologi mediante fibra ottica è pratica solo su distanze relativamente limitate (decine o poche centinaia di chilometri), limitando la scala di reti cronometriche realizzabili con la tecnologia attuale.

Ricerche sono in corso per sviluppare tecniche di confronto di orologi via satelliti o via collegamenti radio a microonde, che potrebbero estendere la portata delle comparazioni cronometriche a scale continentali o globali. Progetti come il European Quantum Communication Infrastructure prevedono l'utilizzo di satelliti quantistici per distribuire segnali di tempo ultra-precisi e per confrontare orologi a grandi distanze, aprendo la possibilità di una rete cronometrica globale per geodesia.

## Geodesia Quantistica e Sensori Atomici per Gravimetria di Nuova Generazione

Oltre alla cronometria, la fisica quantistica sta contribuendo alla geodesia attraverso lo sviluppo di gravimetri atomici basati su interferometria atomica. Questi strumenti utilizzano atomi ultrafreddi (tipicamente raffreddati a microkelvin mediante tecniche laser) che sono manipolati mediante impulsi laser per creare interferenza quantistica sensibile all'accelerazione gravitazionale.

Il principio è analogo all'interferometria ottica classica, ma invece di dividere un fascio di luce in due percorsi e poi ricombinarlo per osservare frange di interferenza, si divide la funzione d'onda quantistica di atomi in due stati che seguono percorsi diversi nello spazio delle fasi. La differenza di fase accumulata tra i due percorsi dipende dall'accelerazione subita dagli atomi, che per atomi in caduta libera è dominata dalla gravità.

Matematicamente, la fase accumulata è $\Delta\varphi = k_{eff}\, g\, T^2$, dove $k_{eff}$ è il vettore d'onda effettivo della manipolazione laser, $g$ è l'accelerazione di gravità, e $T$ è il tempo di interrogazione (il tempo per cui gli atomi sono in caduta libera). La sensibilità della misura migliora quadraticamente con $T$, incentivando l'uso di tempi di interrogazione lunghi (tipicamente qualche decina di millisecondi fino a secondi in configurazioni sperimentali avanzate).

I gravimetri atomici hanno raggiunto sensibilità comparabili o superiori ai migliori gravimetri tradizionali (superconduttori o a molla). La sensibilità state-of-the-art è dell'ordine di qualche microGal ($10^{-8}$ m/s²) con integrazione di qualche minuto, sufficiente per molte applicazioni geodetiche. Inoltre, i gravimetri atomici hanno vantaggi teorici: sono basati su costanti fondamentali della fisica (la massa dell'atomo e la velocità della luce), potenzialmente fornendo misurazioni assolute senza necessità di calibrazione esterna; e non hanno parti mobili meccaniche (oltre agli atomi stessi), potenzialmente offrendo maggiore stabilità a lungo termine.

Prototipi di gravimetri atomici sono stati testati in campagne geodetiche sul campo. In un esperimento in Italia, un gravimetro atomico portatile è stato trasportato lungo il fianco del vulcano Etna per misurare variazioni di gravità associate a variazioni di densità interna causate da movimenti di magma. In un altro esperimento in Francia, un gravimetro atomico è stato utilizzato per misurazioni in galleria per applicazioni di geofisica esplorativa.

Tuttavia, i gravimetri atomici attuali sono ancora relativamente grandi (tipicamente occupano un rack di strumentazione di circa mezzo metro cubo), fragili (gli atomi ultrafreddi richiedono vuoto ultra-alto e isolamento da vibrazioni), e lenti (il ciclo di misura richiede secondi o decine di secondi, molto più lento dei gravimetri a molla che aggiornano a frequenze di Hertz). La miniaturizzazione e la robustificazione di questi strumenti per applicazioni geodetiche operative rimane una sfida ingegneristica.

Un'applicazione particolarmente promettente dei gravimetri atomici è la gravimetria marina da piattaforme sottomarine autonome. Le misurazioni gravimetriche marine da navi di superficie sono complicate dalle accelerazioni verticali causate dalle onde, che sono molti ordini di granditudine maggiori del segnale gravitazionale di interesse. Piattaforme stabilizzate meccanicamente o algoritmi di correzione sofisticati sono necessari, limitando l'accuratezza. I gravimetri atomici, operati da veicoli sottomarini autonomi (AUV) che navigano a profondità stabili sotto le onde superficiali, potrebbero fornire misurazioni molto più accurate, migliorando drammaticamente la copertura gravimetrica negli oceani.

Gradiometri gravitazionali atomici, che misurano il gradiente della gravità piuttosto che l'accelerazione assoluta, rappresentano un'altra frontiera. Questi dispositivi utilizzano due interferometri atomici separati verticalmente da qualche decina di centimetri, e misurano la differenza nelle accelerazioni misurate dai due interferometri divisa per la separazione, ottenendo il gradiente verticale $\partial g/\partial z$. Misurazioni di gradiente sono meno sensibili a vibrazioni comuni (che affettano entrambi gli interferometri similmente e si cancellano nella differenza) e forniscono informazione complementare all'accelerazione assoluta per interpretazioni geofisiche.

Esperimenti di laboratorio con gradiometri atomici hanno raggiunto sensibilità dell'ordine di qualche Eötvös ($10^{-9}$ $s^{-2}$) con integrazione di minuti, avvicinandosi alle prestazioni dei gradiometri satellitari come GOCE. La prospettiva di gradiometri terrestri o aerotrasportati con questa sensibilità, che potrebbero fornire copertura densa su regioni d'interesse, è molto allettante per applicazioni geodetiche e geofisiche.

## Geodesia Spaziale del Futuro: Nuove Missioni e Tecnologie Emergenti

L'osservazione del campo gravitazionale terrestre dallo spazio continuerà a essere una componente cruciale della geodesia fisica nelle prossime decadi. Missioni satellitari future, attualmente in fase di pianificazione o sviluppo iniziale, promettono di estendere e migliorare le capacità delle missioni correnti.

La missione GRACE Follow-On continuerà a operare presumibilmente fino alla fine degli anni venti del ventunesimo secolo, fornendo la continuità essenziale della serie temporale di variazioni gravitazionali iniziata con GRACE nel 2002. Tuttavia, anche GRACE-FO è una missione con durata limitata, e la comunità scientifica sta già pianificando un successore.

Concetti per una "GRACE Next Generation" includono miglioramenti tecnologici come: interferometria laser con prestazioni ancora migliori di quella di GRACE-FO, baseline tra satelliti variabile (permettendo ottimizzazione della sensibilità per diversi ranghi di lunghezza d'onda), multiple coppie di satelliti che orbitano in piani diversi per migliorare la risoluzione temporale e spaziale, e altitudini orbitali più basse per massimizzare il segnale

gravitazionale (bilanciato contro l'aumento del drag atmosferico e la riduzione della vita orbitale).

Una proposta ambiziosa è la missione MAGIC (Mass-change And Geosciences International Constellation), che prevederebbe una costellazione di dozzine di piccoli satelliti equipaggiati con accelerometri di precisione e inter-satellite ranging, distribuiti in multipli piani orbitali. Questa costellazione fornirebbe copertura quasi-continua del globo e permetterebbe di risolvere variazioni gravitazionali con risoluzione temporale di giorni o settimane e risoluzione spaziale di poche decine di chilometri, superando drammaticamente le capacità delle missioni attuali.

Missioni future potrebbero anche incorporare tecnologie completamente nuove. Atom interferometry in spazio, usando atomi ultrafreddi in condizioni di microgravità, potrebbe raggiungere sensibilità gravitazionali molti ordini di granditudine superiori a quelle ottenibili a terra, dove il tempo di interrogazione è limitato dalla caduta libera degli atomi. Concetti come Cold Atom Laboratory sulla Stazione Spaziale Internazionale stanno dimostrando la fattibilità di queste tecnologie in ambiente spaziale.

Gravitometria quantistica satellitare potrebbe non solo migliorare la determinazione del campo gravitazionale statico e delle sue variazioni temporali, ma anche abilitare test fondamentali di relatività generale e ricerche di fenomeni esotici come onde gravitazionali di frequenza molto bassa (complementari agli osservatori terrestri LIGO/Virgo e all'osservatorio spaziale futuro LISA), o rivelazione di materia oscura se questa interagisce con il campo gravitazionale in modi ancora non compresi.

Oltre alle missioni gravitazionali dedicate, l'integrazione di sensori gravitazionali su satelliti con missioni primarie diverse sta diventando più comune. La costellazione Iridium NEXT, che fornisce comunicazioni satellitari globali, trasporta payload scientifici che includono rivelatori di plasma spaziale e magnetometri. Concetti simili per "rideshare" strumentazione gravitazionale o geodetica su costellazioni commerciali potrebbero ridurre drasticamente i costi e aumentare la densità di osservazioni.

## Geodesia e Scienza del Sistema Terra: Integrazioni Multi-Disciplinari

La geodesia moderna non è più una disciplina isolata focalizzata solo sulla forma della Terra e sui sistemi di coordinate, ma è sempre più integrata in un framework multi-disciplinare che studia il Sistema Terra nel suo complesso: l'interazione tra atmosfera, oceani, criosfera, biosfera, superficie solida, e interno profondo.

Questa integrazione è esemplificata dal concetto di Variazioni del Sistema Terra (Earth System Changes) monitorabili mediante tecniche geodetiche. Variazioni di massa (misurate da gravimetria satellitare), variazioni di forma (misurate da GNSS, altimetria, e interferometria radar), variazioni del livello del mare (altimetria), variazioni della rotazione terrestre (tecniche di geodesia spaziale come VLBI e analisi di orbite satellitari), e variazioni del campo magnetico (magnetometri satellitari) forniscono vincoli integrati su processi che operano attraverso sfere diverse del sistema Terra.

Per esempio, il ciclo idrologico globale coinvolge evaporazione dagli oceani (oceanografia), trasporto di vapore acqueo nell'atmosfera (meteorologia), precipitazione su continenti

(idrologia), accumulo come neve e ghiaccio (criosfera), infiltrazione come acque sotterranee (idrogeologia), scorrimento superficiale in fiumi (idrologia di superficie), e ritorno agli oceani (oceanografia). Ciascuna di queste fasi coinvolge redistribuzioni di massa che sono rilevabili geodeticamente attraverso variazioni di gravità (GRACE), deformazioni della crosta (GNSS), e variazioni del livello del mare (altimetria).

L'integrazione di osservazioni geodetiche con modelli numerici del Sistema Terra (Earth System Models, ESM) che simulano questi processi accoppiati rappresenta una frontiera di ricerca attiva. I modelli ESM predicono distribuzioni e flussi di massa, energia e momento attraverso il sistema; le osservazioni geodetiche forniscono vincoli su questi modelli, permettendo di testare la fisica implementata e di migliorare le parametrizzazioni di processi sub-scala che non possono essere simulati esplicitamente.

Un esempio concreto è l'assimilazione di dati di variazioni gravitazionali da GRACE in modelli idrologici globali. Tradizionalmente, questi modelli sono forzati da precipitazione e evapotraspirazione derivate da dati meteorologici, ma hanno grande incertezza nella partizione dell'acqua tra acque superficiali, umidità del suolo a diverse profondità, e acque sotterranee. Le osservazioni GRACE della variazione totale di immagazzinamento di acqua terrestre forniscono un vincolo integrativo che permette di aggiustare i parametri del modello (come conduttività idraulica, porosità, profondità delle radici che estraggono acqua) per migliorare l'accordo con le osservazioni.

Similmente, l'assimilazione di altimetria satellitare in modelli di circolazione oceanica permette di vincolare correnti, trasporti di calore, e mix verticale negli oceani. I modelli oceanici hanno molti parametri incerti (coefficienti di viscosità turbolenta, parametrizzazioni di convezione profonda, rappresentazione di correnti al margine dei ghiacci marini) che possono essere ottimizzati mediante confronto con la topografia dinamica oceanica osservata.

Queste tecniche di assimilazione dati utilizzano metodi avanzati di statistica bayesiana e teoria del controllo ottimale, come filtri di Kalman ensemble o metodi adjoint, che propagano incertezze attraverso i modelli e quantificano rigorosamente quanto le osservazioni riducono l'incertezza nelle stime dello stato del sistema e nelle previsioni future.

## Conclusioni e Visione per il Futuro della Geodesia

La geodesia del ventunesimo secolo si trova in una posizione straordinariamente dinamica e promettente. Le capacità osservative sono cresciute esponenzialmente negli ultimi decenni, con precisioni che sono migliorate da metri a millimetri, e copertura che si è espansa da reti terrestri sparse a monitoraggio satellitare globalmente continuo. I framework teorici si sono evoluti per incorporare fisica sempre più sofisticata, dalla relatività generale alla meccanica quantistica. E le applicazioni si sono estese ben oltre i confini tradizionali della professione geodetica, pervadendo scienze del clima, oceanografia, idrologia, sismologia, vulcanologia, e persino fisica fondamentale.

Il geoide e le ondulazioni geoidali, quel concetto apparentemente astratto di una superficie equipotenziale che meglio rappresenta la forma fisica della Terra, si sono rivelati essere nodi cruciali che connettono questa ricchezza di discipline e applicazioni. La determinazione del geoide richiede sintesi di gravimetria terrestre e satellitare, altimetria oceanica, livellazioni

geometriche, posizionamento GNSS, modellazione gravitazionale teorica, e calcolo numerico ad alte prestazioni. Le applicazioni del geoide spaziano dalla navigazione e cartografia quotidiana, alla gestione di risorse idriche globali, al monitoraggio del livello del mare per adattamento al cambiamento climatico, alla verifica di teorie della struttura interna della Terra.

Guardando al futuro, possiamo anticipare diversi sviluppi che continueranno a trasformare il campo. La transizione globale verso l'International Height Reference System unificato rimuoverà finalmente la frammentazione centenaria dei datum verticali nazionali, abilitando applicazioni transnazionali e globali che richiedono altezze consistenti. La cronometria geodetica basata su orologi atomici ottici potrebbe rivoluzionare la metrologia delle altezze, fornendo precisioni e risoluzioni temporali precedentemente inimmaginabili. I sensori quantistici - gravimetri atomici, gradiometri, orologi - passeranno da prototipi di laboratorio a strumenti geodetici operativi, offrendo capacità migliorate e nuovi paradigmi di misurazione.

Nello spazio, costellazioni di satelliti gravitazionali di nuova generazione forniranno monitoraggio quasi-continuo delle redistribuzioni di massa planetaria con risoluzioni spaziali e temporali senza precedenti, trasformando la nostra capacità di osservare e comprendere il Sistema Terra come sistema dinamico integrato. L'integrazione sempre più stretta tra osservazioni geodetiche e modelli numerici multi-fisici permetterà simulazioni e previsioni più accurate di fenomeni che spaziano da terremoti e tsunami, a siccità e inondazioni, a innalzamento del livello del mare e ritiro dei ghiacciai.

Ma forse l'aspetto più entusiasmante è che, nonostante tutti questi progressi, rimangono domande fondamentali aperte. La struttura profonda del mantello terrestre e le dinamiche della convezione che guida la tettonica delle placche sono ancora solo parzialmente comprese, e il geoide fornisce vincoli cruciali ma incompleti. La risposta della Terra a forzanti antropogeniche (emissioni di gas serra, estrazione di risorse, modifiche del paesaggio) su scale di decenni e secoli è incerta, e le osservazioni geodetiche di cambiamenti in atto sono essenziali per ridurre queste incertezze. E questioni profonde sulla natura dello spazio-tempo, della gravità, e dell'universo a scale cosmologiche potrebbero trovare illuminazione da esperimenti geodetici di precisione estrema.

La geodesia, quella antica arte di misurare la Terra, rimane dunque una scienza vivace, rilevante e in rapida evoluzione. Il geoide e le ondulazioni geoidali continueranno a essere concetti centrali, ponti tra geometria e fisica, tra osservazioni locali e struttura globale, tra la superficie tangibile sotto i nostri piedi e le profondità inaccessibili a migliaia di chilometri sotto, tra il presente osservabile e il passato geologico e il futuro climatico. La ricerca di comprendere sempre più profondamente e precisamente la forma del nostro pianeta e come questa cambia nel tempo è una ricerca che continuerà ad ispirare geodeti, geofisici, e scienziati del Sistema Terra per le generazioni a venire.

# Geoide e Ondulazioni Geoidali - Parte XII

# Gradiometria Gravitazionale Satellitare e Tecniche Avanzate di Inversione

## Principi Fisici e Matematici della Gradiometria Satellitare

La gradiometria gravitazionale rappresenta una delle metodologie più sofisticate e informative per la determinazione del campo gravitazionale terrestre. A differenza delle misurazioni gravimetriche tradizionali che quantificano l'accelerazione gravitazionale (un vettore), la gradiometria misura il tensore di gradiente gravitazionale, ovvero le derivate spaziali seconde del potenziale gravitazionale. Questa informazione aggiuntiva fornisce una risoluzione spaziale superiore e una sensibilità maggiore alle strutture di densità nella crosta e nel mantello superiore.

Il tensore di gradiente gravitazionale è una matrice simmetrica tre per tre i cui elementi sono definiti come $\Gamma_{ij} = \partial^2 V/\partial x_i \partial x_j$, dove $V$ è il potenziale gravitazionale e $x_i$, $x_j$ rappresentano le coordinate spaziali (tipicamente x, y, z in un sistema cartesiano locale o radiale, tangenziale est, tangenziale nord in un sistema sferico). Poiché il potenziale soddisfa l'equazione di Laplace nello spazio esterno alla Terra, la traccia del tensore è nulla: $\Gamma_{xx} + \Gamma_{yy} + \Gamma_{zz} = \nabla^2 V = 0$. Questo significa che il tensore ha solo cinque componenti indipendenti.

Le unità del tensore di gradiente sono Eötvös, denotate E, dove $1 \text{ E} = 10^{-9} \text{ s}^{-2} = 10^{-4}$ mGal/km. Il tensore di gradiente gravitazionale terrestre all'altitudine di un satellite a orbita bassa (circa 250-500 km) ha componenti tipiche dell'ordine di 1.000-3.000 E per il gradiente verticale $\Gamma_{zz}$, e ordini di grandezza inferiori per le componenti orizzontali e incrociate. Le variazioni spaziali di interesse geofisico sono tipicamente dell'ordine di 1-10 E, richiedendo strumentazione di estrema sensibilità.

La missione GOCE (Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer), operata dall'Agenzia Spaziale Europea dal 2009 al 2013, ha rappresentato la prima realizzazione di un gradiometro gravitazionale spaziale di alta precisione. Il satellite orbitava a un'altitudine eccezionalmente bassa (inizialmente 260 km, poi ridotta a 224 km nelle fasi finali della missione) per massimizzare il segnale gravitazionale. Il gradiometro consisteva in sei accelerometri ultrasensibili disposti in tre coppie ortogonali, ciascuna separata da una distanza di baseline di circa cinquanta centimetri.

Il principio di misura del gradiometro è il seguente. Due accelerometri separati da una distanza $\Delta x$ lungo l'asse x misureranno accelerazioni gravitazionali che differiscono approssimativamente di $\Delta g_x \approx (\partial g_x/\partial x) \Delta x$. Misurando questa differenza e dividendola per la baseline, si ottiene una stima del gradiente: $\partial g_x/\partial x \approx \Delta g_x/\Delta x$. Nella realtà, il segnale misurato contiene anche accelerazioni non gravitazionali (principalmente il drag atmosferico residuo e perturbazioni termiche), che devono essere rimossi mediante elaborazione sofisticata del segnale.

La configurazione a sei accelerometri di GOCE permetteva di misurare tutte le componenti del tensore di gradiente simultaneamente. Gli accelerometri utilizzavano masse di prova capacitive ultrasensibili, capaci di rilevare spostamenti dell'ordine di nanometri,

corrispondenti ad accelerazioni di circa $10^{-12}$ m/s². La banda di frequenza delle misurazioni era compresa tra 5 mHz e 100 mHz, corrispondente a lunghezze d'onda spaziali tra circa 80 e 10.000 km dato la velocità orbitale del satellite (circa 7,8 km/s).

Una sfida fondamentale nell'elaborazione dei dati di GOCE è stata la separazione del segnale gravitazionale dalle accelerazioni non gravitazionali e dal rumore strumentale. Il satellite era equipaggiato con un sistema di controllo di drag compensazione: piccoli propulsori ionici compensavano continuamente il drag atmosferico, mantenendo il satellite in una sorta di caduta libera continua rispetto al campo gravitazionale. Questo riduceva drasticamente le accelerazioni non gravitazionali da circa $10^{-6}$ m/s² (il drag non compensato) a circa $10^{-8}$ m/s² (errori di compensazione residui).

Nonostante la compensazione del drag, il segnale gravitazionale (dell'ordine di $10^{-10}$ m/s² per le variazioni di interesse) era ancora molto più piccolo delle accelerazioni non gravitazionali residue. La separazione è stata possibile sfruttando le differenti caratteristiche spettrali: le accelerazioni gravitazionali variano con frequenze corrispondenti alle scale spaziali delle strutture geologiche (tipicamente periodi superiori a qualche secondo), mentre le accelerazioni non gravitazionali hanno spesso componenti ad alta frequenza legate alle vibrazioni strutturali del satellite e alle fluttuazioni del drag atmosferico.

## Inversione dei Dati di Gradiometria: Approcci Spazio-Saggio e Spettrale

L'inversione dei dati di gradiometria per determinare il campo gravitazionale richiede metodologie sofisticate che tengano conto della geometria orbitale, della banda di frequenza limitata delle misurazioni, e della presenza di errori di misura correlati. Due approcci principali sono stati utilizzati: il metodo spazio-saggio (space-wise) e il metodo spettrale (spectral).

Nel metodo spazio-saggio, le osservazioni del tensore di gradiente lungo l'orbita sono utilizzate direttamente per stimare i coefficienti armonici sferici del potenziale gravitazionale mediante inversione ai minimi quadrati. Consideriamo un satellite che si muove lungo un'orbita con posizione r(t) funzione del tempo. In ciascun istante t_k, il gradiometro misura (con errore) le componenti del tensore di gradiente Γ_{ij}(r(t_k)). Queste osservazioni possono essere messe in relazione con i coefficienti armonici attraverso le derivate seconde dello sviluppo armonico del potenziale.

Esplicitamente, se V(r, θ, λ) = (GM/r) ∑*{n}* ∑{m} (a/r)^n P_{nm}(cos θ) [C_{nm} cos(mλ) + S_{nm} sin(mλ)], allora le componenti del tensore di gradiente sono derivate seconde di questa espressione. Per esempio, il gradiente verticale (componente radiale-radiale) è Γ_{rr} = $\partial^2 V/\partial r^2$ = (GM/r³) ∑*{n}* ∑{m} (n+1)(n+2) (a/r)^n P_{nm}(cos θ) [C_{nm} cos(mλ) + S_{nm} sin(mλ)]. Le altre componenti hanno espressioni analoghe ma più complesse coinvolgenti derivate delle funzioni di Legendre rispetto a θ e derivate rispetto a λ.

Raccogliendo tutte le osservazioni in un vettore y e i coefficienti armonici incogniti in un vettore x, otteniamo il sistema lineare y = Ax + ε, dove A è la matrice di design che contiene le derivate seconde valutate nelle posizioni orbitali, e ε è l'errore di misura. La dimensione di questo sistema è enorme: per una missione di durata pluriennale con frequenza di campionamento di 1 Hz, ci sono circa $10^8$ osservazioni, e per uno sviluppo armonico fino a grado 250 ci sono circa $6 \times 10^4$ coefficienti incogniti.

La soluzione ai minimi quadrati $\hat{x} = (A^T W A)^{-1} A^T W y$, dove W è una matrice di pesi (tipicamente l'inverso della covarianza dell'errore), è computazionalmente proibitiva da calcolare direttamente. Sono state sviluppate tecniche iterative che sfruttano la struttura sparsa della matrice A (ciascuna osservazione è influenzata solo da un sottoinsieme dei coefficienti armonici) e metodi di regolarizzazione che stabilizzano la soluzione penalizzando le componenti di alto grado.

Il metodo spettrale, al contrario, trasforma prima le osservazioni spazio-temporali lungo l'orbita nel dominio della frequenza o del grado armonico. Questo approccio sfrutta il fatto che la copertura orbitale di un satellite in orbita polare (come GOCE) si distribuisce quasi uniformemente su tutta la superficie terrestre dopo un periodo sufficientemente lungo, permettendo una sintesi armonica quasi diretta.

Un risultato fondamentale della teoria delle orbite satellitari è che le osservabili satellitari (posizione, velocità, accelerazione, gradienti) possono essere espresse come combinazioni lineari dei coefficienti armonici del campo gravitazionale, con pesi che dipendono dai parametri orbitali. Per un satellite in orbita circolare polare, le osservabili sono particolarmente sensibili alle armoniche zonali (quelle con $m = 0$) e alle armoniche tesserali con ordini m vicini a determinati valori risonanti legati al rapporto tra il periodo orbitale e il periodo di rotazione terrestre.

La missione GOCE è stata progettata per avere un'orbita con caratteristiche ottimali per la determinazione del campo gravitazionale. L'orbita quasi polare (inclinazione 96,7 gradi) garantiva copertura globale. L'altitudine molto bassa massimizzava il segnale gravitazionale, che decresce rapidamente con l'altezza (approssimativamente come $(R/r)^{n+2}$ per il grado n). La durata della missione (oltre tre anni) permetteva di accumulare dati sufficienti per ridurre gli errori casuali e risolvere ambiguità dovute alla geometria orbitale.

## Combinazione di Dati Satellitari Eterogenei e Soluzioni Integrate

Una delle frontiere più avanzate della geodesia satellitare moderna è la combinazione ottimale di dati provenienti da multiple piattaforme e tecniche di osservazione. Le missioni CHAMP, GRACE, GOCE e i dati di altimetria satellitare forniscono informazioni complementari sul campo gravitazionale, sensibili a diversi ranghi di lunghezza d'onda e con diverse caratteristiche di errore.

CHAMP (Challenging Minisatellite Payload), operata dal 2000 al 2010, trasportava un accelerometro triassiale e un ricevitore GPS di alta precisione. Le osservazioni di CHAMP consistevano principalmente in perturbazioni orbitali accuratamente tracciate, dalle quali si potevano dedurre le accelerazioni gravitazionali. CHAMP era particolarmente sensibile al campo gravitazionale a lunghezze d'onda lunghe (gradi armonici bassi, $n < 70$) grazie alla sua altitudine relativamente alta (inizialmente 450 km, decadendo gradualmente) e alla lunga durata della missione.

GRACE (Gravity Recovery and Climate Experiment), operata dal 2002 al 2017, e il suo successore GRACE Follow-On (lanciato nel 2018), consistono in due satelliti identici che orbitano in formazione a una distanza di circa 220 km. Un sistema di misura di precisione micrometrica (inizialmente a microonde, poi integrato con un interferometro laser in GRACE-FO) traccia continuamente le variazioni nella separazione tra i satelliti causate dalle

anomalie gravitazionali sotto di loro. Quando i satelliti attraversano una regione con eccesso di massa, il satellite anteriore è accelerato verso l'anomalia, aumentando temporaneamente la separazione; poi, quando il satellite posteriore attraversa la stessa anomalia, la separazione diminuisce nuovamente.

La sensibilità di GRACE alle variazioni temporali del campo gravitazionale ha rivoluzionato lo studio di fenomeni dinamici terrestri. Le mappe mensili del campo gravitazionale prodotte da GRACE permettono di monitorare redistribuzioni di massa associate a fenomeni idrologici (immagazzinamento di acqua nei bacini fluviali, variazioni delle acque sotterranee), criosferici (fusione delle calotte glaciali, variazioni della massa di neve), e oceanici (variazioni della massa oceanica totale e redistribut ioni dovute a correnti).

GOCE, come discusso, forniva misurazioni del tensore di gradiente gravitazionale con sensibilità ottimale a lunghezze d'onda intermedie (gradi armonici 70-250, corrispondenti a circa 80-400 km). La combinazione di questi tre tipi di dati satellitari permette di determinare il campo gravitazionale su tutto lo spettro di lunghezze d'onda con accuratezza ottimizzata.

L'altimetria satellitare radar sugli oceani, fornita da missioni come TOPEX/Poseidon, Jason-1/2/3, Sentinel-3 e altre, misura l'altezza della superficie oceanica rispetto all'ellissoide di riferimento con precisione centimetrica. Su scale temporali lunghe (medie pluriennali), questa altezza è dominata dall'ondulazione geoidale, permettendo di dedurre il geoide oceanico. L'altimetria è particolarmente preziosa perché fornisce copertura densa e uniforme sugli oceani, dove le misurazioni gravimetriche dirette da navi sono sparse.

La procedura di combinazione ottimale di questi dati eterogenei utilizza tipicamente un approccio ai minimi quadrati pesati nel dominio spettrale. Ciascun tipo di dato fornisce informazioni sui coefficienti armonici con diversa sensibilità e diversa accuratezza in funzione del grado n e dell'ordine m. Per esempio, GRACE è estremamente accurato per i gradi bassi ($n < 100$) ma meno informativo per i gradi alti; GOCE fornisce informazioni eccellenti per gradi intermedi ($100 < n < 250$); l'altimetria oceanica, combinata con modelli di topografia dinamica, contribuisce su tutti i gradi ma solo sugli oceani; i dati gravimetrici terrestri sono essenziali per i gradi molto alti ($n > 250$) sui continenti.

La matrice di covarianza dell'errore di ciascun tipo di dato deve essere accuratamente valutata e incorporata nella soluzione combinata. Gli errori nei dati satellitari hanno spesso strutture di correlazione complesse: errori a lunga lunghezza d'onda dovuti a drift strumentale, errori correlati al periodo orbitale dovuti a imperfette modellazioni delle forze non gravitazionali, e errori casuali ad alta frequenza dovuti al rumore strumentale. La specificazione corretta di queste covarianze è cruciale per ottenere una soluzione ottimale e realistiche stime di incertezza.

## Problemi Inversi Non Lineari e Inversione Congiunta con Dati Sismologici

Mentre il problema di determinare i coefficienti armonici del potenziale gravitazionale da osservazioni gravitazionali o gradiometriche è lineare (come descritto sopra), molti problemi inversi di interesse geofisico coinvolgono relazioni non lineari tra i parametri del modello e le osservabili. Un esempio importante è l'inversione per determinare la distribuzione

tridimensionale di densità all'interno della Terra, ρ(r, θ, λ), a partire dalle osservazioni del campo gravitazionale esterno.

Questo problema è severamente non univoco (ill-posed): infinite distribuzioni di densità diverse possono produrre lo stesso campo gravitazionale esterno. Questo è una conseguenza del teorema di non-unicità del problema gravitazionale inverso: la conoscenza del campo gravitazionale esterno determina univocamente il potenziale gravitazionale in tutto lo spazio esterno, ma non determina univocamente la distribuzione di massa interna che lo genera. Masse disposte a diverse profondità ma con appropriati valori e geometrie possono produrre effetti gravitazionali esterni indistinguibili.

Per ottenere soluzioni significative, è necessario incorporare informazione aggiuntiva o vincoli nel problema inverso. Un approccio potente è l'inversione congiunta (joint inversion) di dati gravitazionali con altri tipi di dati geofisici, in particolare dati sismologici. La velocità delle onde sismiche all'interno della Terra è funzione della temperatura, della pressione, della composizione mineralogica, e della presenza di fasi fluide o parzialmente fuse. Anche la densità dipende da queste stesse variabili attraverso relazioni termodinamiche e petrologi che (equazioni di stato).

La tomografia sismica fornisce modelli tridimensionali delle variazioni di velocità sismica δv_s/v_s e δv_p/v_p (per le onde di taglio S e le onde di compressione P rispettivamente) all'interno della Terra. Queste variazioni di velocità possono essere convertite in variazioni di densità utilizzando parametri di scala derivati dalla fisica minerale e dalla petrologia sperimentale. Una relazione empirica comunemente utilizzata è δρ/ρ = R (δv_s/v_s), dove R è un parametro di conversione che dipende dalla profondità, dalla temperatura e dalla composizione, e assume tipicamente valori tra 0,2 e 0,4 nel mantello.

L'inversione congiunta cerca un modello di densità tridimensionale che sia simultaneamente consistente con le osservazioni gravitazionali e con le osservazioni sismologiche (convertite in densità), minimizzando una funzione obiettivo che combina i misfit di entrambi i tipi di dati più termini di regolarizzazione. Matematicamente, il problema può essere formulato come minimizzare $\Phi = ||W_g (d_g^{obs} - g(\rho))||^2 + ||W_s (d_s^{obs} - s(\rho))||^2 + \lambda_g R_g(\rho) + \lambda_s R_s(\rho)$, dove $d_g^{obs}$ e $d_s^{obs}$ sono le osservazioni gravitazionali e sismologiche, $g(\rho)$ e $s(\rho)$ sono i predittori in avanti che calcolano le osservabili date la distribuzione di densità ρ, $W_g$ e $W_s$ sono matrici di peso, $R_g$ e $R_s$ sono termini di regolarizzazione (tipicamente norme delle derivate spaziali per imporre smoothness), e $\lambda_g$ e $\lambda_s$ sono parametri di regolarizzazione.

La minimizzazione di questa funzione obiettivo non lineare richiede metodi iterativi. Un approccio comune è utilizzare il metodo di Gauss-Newton o metodi quasi-Newton che costruiscono approssimazioni localmente lineari del problema e iterano verso la soluzione. Ad ogni iterazione, si calcola il gradiente della funzione obiettivo rispetto ai parametri del modello (la distribuzione di densità su una griglia tridimensionale), e si aggiorna il modello nella direzione di discesa più ripida (o in una direzione coniugata per convergenza più rapida).

Il calcolo del gradiente richiede la valutazione delle derivate parziali delle osservabili rispetto ai parametri del modello, ovvero le matrici Jacobiane o di sensibilità. Per le osservabili gravitazionali, queste sensibilità possono essere calcolate analiticamente: la variazione

dell'anomalia di gravità in un punto di osservazione dovuta a una variazione di densità δρ in un elemento di volume ΔV alla posizione r' è $\delta g = G \, \delta\rho \, \Delta V \, (z - z')/|r - r'|^3$, dove (x, y, z) è il punto di osservazione e (x', y', z') è la posizione dell'elemento di volume.

Una difficoltà pratica nell'inversione congiunta è il bilanciamento appropriato tra i due tipi di dati, che hanno unità fisiche diverse, accuratezze diverse, e sensibilità diverse alle strutture a diverse scale spaziali. I dati gravitazionali hanno generalmente risoluzione laterale buona ma risoluzione verticale (in profondità) scarsa, specialmente per strutture profonde. I dati sismologici hanno risoluzione sia laterale sia verticale che dipende dalla copertura di raggi sismici e dalla banda di frequenza utilizzata, ma sono tipicamente più sensibili alle anomalie nel mantello superiore e intermedio dove i raggi sismici si propagano più efficientemente.

Il bilanciamento tra i due tipi di dati è spesso realizzato attraverso la scelta dei parametri di peso $W_g$ e $W_s$ e dei parametri di regolarizzazione $\lambda_g$ e $\lambda_s$. Questi parametri possono essere determinati oggettivamente utilizzando principi come la curva L multi-dimensionale o metodi bayesiani gerarchici, oppure possono essere scelti soggettivamente basandosi su considerazioni fisiche circa l'affidabilità relativa dei diversi dataset.

Un risultato fondamentale dell'inversione congiunta di dati gravitazionali e sismologici per il mantello terrestre è l'identificazione di regioni dove le anomalie di densità e di velocità sismica sono ben correlate (come predetto dalle variazioni termiche) e regioni dove la correlazione è debole o inversa (suggerendo controllo composizionale o presenza di fasi parzialmente fuse). Per esempio, le grandi provincie di bassa velocità sismica (LLSVP) sotto l'Africa e il Pacifico nel mantello inferiore mostrano anomalie gravitazionali (ondulazioni geoidali) positive, indicando che nonostante la bassa velocità sismica (che suggerirebbe materiale caldo e meno denso), la densità integrata è maggiore del normale, probabilmente a causa di arricchimento in ferro o altre componenti dense.

## Gradiometria Gravita zionale per l'Esplorazione delle Risorse Naturali

Oltre alle applicazioni nella geodesia globale e nella geofisica profonda, la gradiometria gravitazionale trova importanti applicazioni nell'esplorazione delle risorse naturali, in particolare per l'individuazione di giacimenti minerari e di idrocarburi, e per la caratterizzazione geologica ad alta risoluzione della crosta superficiale. In questi contesti, la gradiometria è tipicamente effettuata da piattaforme aeree piuttosto che satellitari, per massimizzare la risoluzione spaziale e la sensibilità alle strutture crostali superficiali.

Un gradiometro gravimetrico aerotrasportato consiste tipicamente in una piattaforma stabilizzata inerzialmente che trasporta più accelerometri disposti in configurazione differenziale. La piattaforma viene montata su un aereo che vola a bassa quota (tipicamente 80-150 metri sopra il terreno) seguendo linee di volo parallele con spaziatura di qualche centinaio di metri. La bassa quota e l'alta velocità di campionamento spaziale (determinata dalla velocità dell'aereo e dalla frequenza di misura) permettono di risolvere anomalie gravitazionali con lunghezze d'onda di pochi chilometri o meno.

Le anomalie gravitazionali e del tensore di gradiente generate da strutture geologiche superficiali dipendono dal contrasto di densità, dalla geometria tridimensionale, e dalla profondità della struttura anomala. Un corpo di forma sferica con densità anomala Δρ e raggio a sepolto a profondità z produce un'anomalia di gravità in superficie di ampiezza

massima $\Delta g_{max} \approx (4\pi/3)\ G\ \Delta\rho\ a^3/z^2$, mentre il gradiente verticale ha ampiezza $\Delta(\partial g/\partial z)_{max} \approx (4\pi)\ G\ \Delta\rho\ a^3/z^3$. Queste relazioni mostrano che il gradiente decresce più rapidamente con la profondità rispetto all'anomalia di gravità stessa, rendendo le misurazioni di gradiente particolarmente sensibili alle strutture superficiali.

Nell'esplorazione mineraria, gli obiettivi tipici includono corpi di minerali densi (come solfuri massicci, ossidi di ferro, kimberliti diamantifere) che hanno densità significativamente maggiori delle rocce incassanti circostanti. Un deposito di solfuri massicci con densità $\rho \approx 4.500$ kg/m³ incorporato in rocce metamorfiche con densità $\rho \approx 2.700$ kg/m³ ha un contrasto di densità $\Delta\rho \approx 1.800$ kg/m³. Un corpo sferico di tale composizione con raggio 100 m sepolto a profondità 200 m produrrebbe un'anomalia di Bouguer di circa 1,3 mGal e un gradiente verticale di circa 13 E, entrambi facilmente rilevabili con strumentazione moderna.

L'interpretazione dei dati di gradiometria aerotrasportata richiede tecniche di inversione che stimano la distribuzione di densità nel sottosuolo coerente con le osservazioni. Una difficoltà fondamentale è l'ambiguità tra profondità e contrasto di densità: un corpo piccolo e denso vicino alla superficie può produrre un'anomalia simile a un corpo grande e meno denso più profondo. Questa ambiguità può essere parzialmente risolta incorporando informazione geologica a priori (vincoli sulla gamma di densità possibili, sulla profondità massima di sepoltura, sulla geometria plausibile) o combinando i dati gravimetrici con altri dati geofisici (magnetici, elettrici, sismici).

Un metodo di inversione comunemente utilizzato nella pratica applicata è l'inversione per tessellazione (voxel inversion), dove il sottosuolo è discretizzato in un grande numero di celle (voxel) tridimensionali, ciascuna con densità uniforme incognita. Il problema inverso consiste nel determinare la densità di ciascun voxel che minimizza la discrepanza tra le anomalie gravitazionali osservate e quelle calcolate, soggetto a vincoli di regolarizzazione che impongono smoothness o sparsità della soluzione. La regolarizzazione è essenziale perché il problema è fortemente sottodeterminato: il numero di voxel è tipicamente molto maggiore del numero di osservazioni indipendenti.

Una regolarizzazione comunemente utilizzata è la regolarizzazione di Tikhonov del secondo ordine, che penalizza le derivate spaziali seconde della distribuzione di densità, favorendo soluzioni lisce. Alternativamente, la regolarizzazione basata sulla norma L1 (minimizzazione della somma dei valori assoluti piuttosto che dei quadrati) favorisce soluzioni sparse con transizioni di densità brevi, che possono essere più appropriate per modellare corpi geologici con confini netti.

Nell'esplorazione petrolifera, gli obiettivi sono tipicamente strutture geologiche che possono contenere idrocarburi: anticlinali, trappole strutturali, intrusioni saline. Le intrusioni saline (salt domes) sono particolarmente significative perché il sale ha densità ($\rho \approx 2.200$ kg/m³) significativamente minore delle rocce sedimentarie circostanti ($\rho \approx 2.400$-$2.600$ kg/m³), producendo anomalie gravitazionali negative distintive. Inoltre, le strutture saline sono spesso associate a trappole petrolifere nei sedimenti adiacenti deformati.

La gradiometria marina, effettuata da navi o da veicoli sottomarini autonomi, ha applicazioni nell'esplorazione petrolifera offshore e nella caratterizzazione del fondale oceanico. Le sfide tecniche della gradiometria marina includono la necessità di compensare i movimenti della piattaforma dovuti alle onde oceaniche e alle correnti, che producono accelerazioni molto

maggiori del segnale gravitazionale di interesse. Sistemi di stabilizzazione inerziale sofisticati e algoritmi di filtraggio adattivo sono necessari per estrarre il segnale gravitazionale dal rumore di movimento.

# Geoide e Ondulazioni Geoidali - Parte XIII

## Teoria Avanzata del Potenziale Gravitazionale e Trasformazioni Integrali in Geodesia

### Operatori Integrali di Hotine e Teoria delle Trasformazioni tra Funzionali Gravitazionali

La geodesia fisica moderna si basa su una struttura matematica profonda che connette diversi funzionali del campo gravitazionale attraverso relazioni integrali. Martin Hotine, nella sua monumentale opera "Mathematical Geodesy" pubblicata nel 1969, sviluppò una teoria sistematica degli operatori integrali che trasformano un funzionale gravitazionale in un altro. Questa teoria generalizza la formula di Stokes e fornisce un framework unificato per trattare il problema della determinazione del geoide e quantità geodetiche correlate.

Consideriamo i principali funzionali del campo gravitazionale comunemente utilizzati in geodesia: il potenziale perturbante T, l'anomalia di gravità Δg, il disturbo di gravità δg, l'ondulazione geoidale N, la deviazione della verticale componenti ξ (nord-sud) e η (est-ovest), e il gradiente di gravità verticale $\partial g/\partial h$. Ciascuno di questi funzionali può essere espresso come un operatore differenziale applicato al potenziale perturbante. Per esempio, l'anomalia di gravità è approssimativamente $\Delta g \approx -\partial T/\partial r - (2/R)T$, dove r è la direzione radiale e R il raggio terrestre; la deviazione della verticale in direzione nord è $\xi \approx -(1/(R\gamma))\, \partial T/\partial \theta$; l'ondulazione geoidale è $N = T/\gamma$ secondo la formula di Bruns.

La teoria di Hotine stabilisce che se conosciamo uno di questi funzionali su tutta la superficie terrestre, possiamo in principio calcolare tutti gli altri attraverso opportune trasformazioni integrali. Queste trasformazioni hanno la forma generale $F_2(P) = \iint_\sigma F_1(Q)\, K_{12}(\psi)\, d\sigma$, dove $F_1$ e $F_2$ sono due funzionali gravitazionali, P è il punto di calcolo, Q è il punto di integrazione che varia su tutta la superficie sferica σ, ψ è la distanza angolare tra P e Q, e $K_{12}(\psi)$ è il kernel integrale che dipende dai due funzionali considerati.

La formula di Stokes è un caso particolare di questa teoria generale, dove $F_1 = \Delta g$ (anomalia di gravità) e $F_2 = N$ (ondulazione geoidale), con kernel $K = (R/(4\pi\gamma))\, S(\psi)$, dove $S(\psi)$ è la funzione di Stokes. Ma esistono molte altre trasformazioni integrali utili. Per esempio, la formula di Vening Meinesz trasforma le anomalie di gravità in deviazioni della verticale: $\xi(P) = (1/(4\pi\gamma)) \iint_\sigma \Delta g(Q)\, M(\psi) \cos\alpha\, d\sigma$, dove $M(\psi) = -\sin\psi + 8\sin^3(\psi/2) + 5\cos\psi \log[\sin(\psi/2) + \sin^2(\psi/2)]$ è il kernel di Vening Meinesz e α è l'azimut dal punto Q al punto P.

Tutti questi kernel integrali possono essere derivati sistematicamente dalla rappresentazione armonica sferica. Se $F_1$ e $F_2$ hanno sviluppi in armoniche sferiche $F_1 = \sum_{n,m} a_{nm} Y_{nm}$ e $F_2 = \sum_{n,m} b_{nm} Y_{nm}$, dove $Y_{nm}$ sono le armoniche sferiche, e se esiste

una relazione algebrica tra i coefficienti b_{nm} = f(n,m) a_{nm}, allora il kernel integrale corrispondente è K(ψ) = ∑_{n} f(n) (2n+1)/(4π) P_n(cos ψ), dove f(n) rappresenta il fattore di trasformazione dipendente dal grado (mediato sull'ordine m) e P_n sono i polinomi di Legendre.

Per la trasformazione da anomalia di gravità a ondulazione geoidale, la relazione spettrale è N_{nm} = (R/(n-1)γ) Δg_{nm}, quindi f(n) = R/(n-1)γ, e il kernel è K(ψ) = (R/(4πγ)) ∑_{n=2}^{∞} [1/(n-1)] (2n+1) P_n(cos ψ). Questa somma può essere valutata analiticamente e produce esattamente la funzione di Stokes S(ψ), dimostrando la consistenza tra l'approccio spettrale e l'approccio integrale.

Un risultato notevole della teoria è che tutti questi kernel hanno singolarità integrabili per ψ → 0 (ovvero quando il punto di calcolo P si avvicina al punto di integrazione Q). La natura della singolarità dipende dal tipo di trasformazione. Per la formula di Stokes, il kernel diverge come S(ψ) ~ 2/ψ per piccoli ψ, una singolarità logaritmica debole che non impedisce l'esistenza dell'integrale. Per trasformazioni coinvolgenti derivate di ordine superiore, la singolarità può essere più forte, richiedendo interpretazione dell'integrale in senso di valore principale.

La trattazione rigorosa di queste singolarità richiede tecniche di analisi funzionale e teoria delle distribuzioni. Un approccio moderno consiste nel considerare i kernel come distribuzioni temperate e gli integrali come prodotti di convoluzione sulla sfera. La teoria delle distribuzioni sferiche, sviluppata da Laurent Schwartz e altri matematici a metà del ventesimo secolo, fornisce un framework matematicamente rigoroso per trattare questi oggetti singolari e le loro proprietà di convergenza.

## Problema al Contorno di Geodesia Fisica e Teoria delle Equazioni Integrali

Il problema centrale della geodesia fisica può essere formulato rigorosamente come un problema al contorno per l'equazione di Laplace. Dato il valore di un funzionale del potenziale gravitazionale (tipicamente l'anomalia di gravità o una combinazione di anomalie di gravità e ondulazioni geoidali da GPS/livellazione) su una superficie S vicina alla superficie terrestre, determinare il potenziale gravitazionale T in tutto lo spazio esterno e, in particolare, sulla superficie del geoide.

Questo è un problema al contorno di tipo misto (mixed boundary value problem) o problema di Molodensky, dal nome del geodeta russo Mikhail Molodensky che lo formulò rigorosamente negli anni quaranta e cinquanta del ventesimo secolo. Il problema è complicato dal fatto che la superficie su cui sono dati i valori al contorno (la superficie topografica terrestre) non coincide con la superficie su cui vogliamo determinare la soluzione (il geoide) e non è una sfera o un ellissoide regolare ma ha una forma irregolare e sconosciuta a priori.

Molodensky dimostrò che questo problema ha una soluzione unica sotto condizioni appropriate, e che la soluzione può essere ottenuta come limite di una sequenza iterativa. La teoria matematica richiede strumenti sofisticati di analisi funzionale, in particolare la teoria degli operatori compatti e dei punti fissi in spazi di Banach. La dimostrazione dell'esistenza e

unicità non è costruttiva e non fornisce direttamente un metodo pratico di calcolo, ma stabilisce che il problema è ben posto matematicamente.

Per scopi pratici, il problema di Molodensky è tipicamente approssimato attraverso linearizzazione. Si assume che la superficie terrestre sia vicina a una superficie di riferimento regolare (ellissoide o sfera), con deviazioni di ordine $h \ll R$ dove h è l'elevazione topografica e R il raggio terrestre. Le equazioni vengono espanse in serie di potenze di h/R, e i termini di ordine $(h/R)^2$ e superiori sono trascurati. Questa linearizzazione trasforma il problema al contorno non lineare su superficie irregolare in un problema lineare su superficie regolare, che può essere risolto mediante le formule integrali classiche come quella di Stokes.

La validità di questa approssimazione lineare è stata oggetto di dibattito nella comunità geodetica. In regioni con topografia estrema come l'Himalaya o le Ande, dove h può raggiungere 8-9 km, il rapporto $h/R \approx 0{,}0014$ è comunque piccolo, suggerendo che la linearizzazione è ragionevole. Tuttavia, studi dettagliati hanno mostrato che i termini non lineari possono produrre effetti dell'ordine di alcuni centimetri sull'ondulazione geoidale in regioni montuose, che diventa significativo per applicazioni che richiedono precisione centimetrica.

Sono stati sviluppati metodi iterativi per incorporare correzioni non lineari. L'idea è di calcolare prima una soluzione approssimata usando la teoria lineare, poi calcolare correzioni dovute ai termini non lineari trascurati, e iterare questo processo fino a convergenza. La convergenza è tipicamente rapida (2-3 iterazioni sono sufficienti) perché i termini non lineari sono piccoli. Tuttavia, l'implementazione pratica di questi metodi iterativi richiede un'accurata modellazione della topografia e delle correzioni topografiche, aumentando significativamente la complessità computazionale.

Un approccio alternativo al problema geodetico al contorno utilizza equazioni integrali piuttosto che formule integrali esplicite. L'idea è di rappresentare il potenziale perturbante come il potenziale di uno strato semplice o doppio distribuito su una superficie regolare (tipicamente la sfera o l'ellissoide), con densità incognita da determinare. Sostituendo questa rappresentazione nelle condizioni al contorno, si ottiene un'equazione integrale per la densità.

Per esempio, se rappresentiamo il potenziale come potenziale di strato semplice $T(P) = \iint_S \mu(Q)/|P-Q| \, d\sigma_Q$, dove $\mu(Q)$ è la densità di strato incognita e S è una sfera di raggio R, e imponiamo che questo soddisfi la condizione al contorno (per esempio, che $-\partial T/\partial r = \Delta g$ sulla sfera), otteniamo un'equazione integrale di Fredholm del secondo tipo per $\mu$: $\mu(P) + \iint_S \mu(Q) \, K(P,Q) \, d\sigma_Q = f(P)$, dove K è un kernel noto derivato dalla condizione al contorno e f è una funzione nota derivata dai dati.

Le equazioni integrali di Fredholm del secondo tipo hanno proprietà matematiche ben studiate. Sotto condizioni appropriate (principalmente che il kernel K sia sufficientemente regolare), queste equazioni hanno soluzioni uniche che possono essere approssimate mediante discretizzazione numerica. Il metodo di collocazione, discusso precedentemente, può essere visto come un metodo di discretizzazione di questo tipo di equazione integrale.

## Trasformazioni tra Sistemi di Altezze e Invarianza Topologica del Geoide

Una questione sottile ma importante nella geodesia teorica riguarda la relazione tra diversi sistemi di altezze e la definizione invariante del geoide. Nella pratica geodetica, si distinguono almeno tre tipi principali di altezze: l'altezza ellissoidica h (distanza dall'ellissoide misurata lungo la normale ellissoidica), l'altezza ortometrica H (distanza dal geoide misurata lungo la linea di forza del campo gravitazionale), e l'altezza normale H* (distanza dal quasi-geoide misurata lungo la linea di forza del campo gravitazionale normale).

L'altezza ortometrica è definita concettualmente come $H = C/\bar{g}$, dove C è il numero geopotenziale (l'integrale di linea della gravità dalla superficie del geoide al punto considerato lungo la linea di forza) e $\bar{g}$ è la gravità media lungo questo percorso. Il problema pratico è che $\bar{g}$ dipende dalla distribuzione di massa sconosciuta tra il geoide e il punto, richiedendo assunzioni sulla densità della topografia intermedia. Diverse assunzioni conducono a definizioni leggermente diverse di altezza ortometrica.

L'altezza normale H*, introdotta da Molodensky, evita questa ambiguità definendo l'altezza rispetto al campo gravitazionale normale (quello dell'ellissoide di riferimento) piuttosto che al campo reale. L'altezza normale è $H^* = C/\bar{\gamma}$, dove $\bar{\gamma}$ è la gravità normale media lungo la linea di forza del campo normale dal quasi-geoide al punto. Il quasi-geoide è la superficie che ha altezza normale zero, e differisce dal geoide per una quantità tipicamente di pochi centimetri, che può raggiungere un metro in regioni montuose.

La relazione tra altezza ellissoidica, altezza ortometrica, e ondulazione geoidale è $h = H + N$, mentre la relazione con altezza normale e anomalia di altezza è $h = H^* + \zeta$, dove $\zeta$ è l'anomalia di altezza (o ondulazione del quasi-geoide). Le quantità N e $\zeta$ differiscono di una correzione che dipende dall'anomalia di Bouguer e dall'altezza: $N - \zeta \approx -(\Delta g_B H)/(2\gamma)$, dove $\Delta g_B$ è l'anomalia di Bouguer.

Questa correzione è tipicamente piccola (pochi centimetri) ma non trascurabile per applicazioni di precisione. È importante riconoscere che N e $\zeta$ non sono la stessa quantità, e confonderle può introdurre errori sistematici nelle trasformazioni tra sistemi di altezze. I modelli geoidali pubblicati specificano generalmente se forniscono ondulazioni geoidali N o anomalie di altezza $\zeta$, sebbene questa distinzione sia spesso non chiaramente comunicata agli utenti non specialisti.

Da un punto di vista più profondo, il geoide e il quasi-geoide sono superfici con significati fisici e matematici leggermente diversi, ma entrambe sono superfici equipotenziali (il geoide del campo reale, il quasi-geoide del campo normale) e condividono la proprietà di essere uniche e ben definite una volta specificato il sistema di riferimento. La topologia del geoide (inteso come superficie bidimensionale immersa nello spazio tridimensionale) è quella di una sfera leggermente deformata, topologicamente equivalente a $S^2$. Questa invarianza topologica è garantita dal fatto che il geoide non ha singolarità, buchi, o auto-intersezioni.

Tuttavia, in situazioni patologiche (puramente teoriche), il geoide potrebbe avere caratteristiche topologiche complesse. Per esempio, se esistesse una cavità completamente chiusa riempita di fluido all'interno della Terra, la superficie equipotenziale interna alla cavità sarebbe disconnessa dalla superficie equipotenziale esterna, creando un geoide multi-connesso. Nella Terra reale, tali cavità non esistono su scale significative, e il geoide è semplicemente connesso.

## Variazioni Temporali del Geoide e Geodesia Quadridimensionale

La maggior parte della teoria geodetica classica tratta il campo gravitazionale e il geoide come statici, variando solo nello spazio ma non nel tempo. Questa è un'approssimazione eccellente per molti scopi, poiché le variazioni temporali sono generalmente molto piccole rispetto all'ampiezza del segnale. Tuttavia, misurazioni geodetiche di altissima precisione estese su periodi pluriennali rivelano che il campo gravitazionale terrestre non è costante ma varia nel tempo a causa di redistribuzioni di massa all'interno del sistema Terra.

Le principali fonti di variazioni temporali del campo gravitazionale includono: movimenti tettonici e deformazioni elastiche della litosfera; recupero post-glaciale isostatico; redistribuzioni idrologiche (variazioni nell'immagazzinamento di acqua nei bacini fluviali, nelle falde acquifere, nei ghiacciai); variazioni oceanografiche (maree oceaniche, variazioni del livello medio del mare, redistribuzioni di massa dovute a correnti); effetti atmosferici (variazioni di pressione atmosferica e masse d'aria); e maree terrestri (deformazioni periodiche della Terra solida dovute alle forze di marea lunari e solari).

Alcune di queste variazioni sono periodiche e prevedibili. Le maree terrestri hanno periodi ben definiti (diurno, semidiurno, mensile, annuale) legati ai moti orbitali della Luna e del Sole, e possono essere calcolate con alta precisione utilizzando la teoria della deformazione elastica terrestre. L'ampiezza della marea terrestre semiduirna principale ($M_2$) è circa trenta centimetri verticalmente alle latitudini medie, corrispondente a una variazione di gravità di circa 200 μGal e a variazioni del potenziale gravitazionale che si traducono in ondulazioni geoidali periodiche dell'ordine di pochi centimetri.

Altre variazioni sono irregolari o hanno componenti secolari (trend a lungo termine). Il recupero post-glaciale isostatico, in risposta alla rimozione dei grandi ghiacciai che coprivano l'emisfero nord durante l'ultima era glaciale (terminata circa 10.000 anni fa), produce sollevamenti continui del suolo in regioni come la Fennoscandia e il Canada settentrionale, con velocità che raggiungono un centimetro all'anno. Questi sollevamenti sono accompagnati da variazioni del campo gravitazionale misurabil i con gravimetria ripetuta o continua e con osservazioni satellitari da GRACE.

Lo scioglimento accelerato delle calotte polari in Groenlandia e Antartide, associato al riscaldamento climatico antropogenico, produce perdite di massa che si traducono in diminuzioni misurabili del campo gravitazionale nelle regioni polari e in ridistribuzioni di massa oceanica globale. Le osservazioni di GRACE dal 2002 hanno quantificato queste perdite di massa con precisione senza precedenti, fornendo una verifica indipendente delle stime derivate da altre tecniche (altimetria glaciale, bilanci di massa in situ).

La descrizione matematica rigorosa di un campo gravitazionale variabile nel tempo richiede l'estensione della teoria geodetica da tre a quattro dimensioni, considerando il tempo come coordinata addizionale. Il potenziale gravitazionale diventa una funzione quadridimensionale $V(r, \theta, \lambda, t)$, e le equazioni che governano la sua evoluzione includono termini che descrivono i processi fisici che causano le variazioni.

Per variazioni dovute a redistribuzioni di massa, la conservazione della massa richiede che $\partial\rho/\partial t + \nabla\cdot(\rho v) = 0$, dove $\rho$ è la densità e $v$ la velocità del fluido o del materiale in movimento. Le variazioni del potenziale sono legate alle variazioni di densità attraverso l'equazione di

Poisson $\nabla^2 V = -4\pi G\rho$. Combinando queste equazioni con le equazioni della dinamica (conservazione del momento, equazioni costitutive del materiale), si ottiene un sistema accoppiato che descrive l'evoluzione spazio-temporale completa del sistema.

Per la maggior parte delle applicazioni geodetiche, non è necessario risolvere queste equazioni accoppiate in piena generalità. È sufficiente trattare le variazioni temporali come perturbazioni sovrapposte a un campo gravitazionale medio, e parametrizzare le variazioni attraverso modelli empirici o semianalitici. Per esempio, le variazioni dovute al recupero post-glaciale possono essere parametrizzate attraverso coefficienti di trend lineare dei coefficienti armonici sferici: C_{nm}(t) = C_{nm}(t_0) + Ċ_{nm}(t - t_0), dove Ċ_{nm} sono le derivate temporali che possono essere stimate da osservazioni ripetute.

Un risultato significativo della geodesia temporale è che le variazioni dell'ondulazione geoidale sono legate alle variazioni di massa attraverso una semplice relazione integrale. Una variazione di massa $\Delta m$ in una regione compatta alla posizione $r_0$ produce una variazione dell'ondulazione geoidale $\Delta N(r) \approx (G\,\Delta m)/(\gamma\,|r - r_0|)$. Integrando su una distribuzione di variazioni di massa, si ottiene $\Delta N(r) = (G/\gamma) \iiint \Delta\rho(r')/|r - r'|\, dV'$, una convoluzione che può essere valutata numericamente date le osservazioni di variazione di densità (per esempio da GRACE).

Questa relazione permette di convertire le osservazioni di variazioni gravitazionali in stime di redistribuzioni di massa, fornendo vincoli quantitativi su processi idrologici, glaciologici e tettonici. Per esempio, le osservazioni di GRACE sulla Groenlandia indicano una perdita di massa di circa 280 Gt/anno (1 gigatonnellata = $10^9$ tonnellate metriche) nella decade 2002-2012, equivalente a un contributo al livello medio globale del mare di circa 0,8 mm/anno, una frazione significativa del trend osservato di innalzamento del livello del mare (circa 3,3 mm/anno totale).

## Connessioni con la Teoria della Relatività Generale e Geodesia Relativistica

A livello di precisione estrema raggiungibile con le moderne tecnologie geodetiche (altimetria millimetrica, temporizzazione con orologi atomici ottici con precisione $10^{-18}$), gli effetti della relatività generale diventano rilevanti e devono essere incorporati esplicitamente nella teoria. La relatività generale predice che il tempo scorre a velocità diverse in punti con potenziali gravitazionali diversi, un effetto che è stato verificato sperimentalmente fin dagli anni sessanta con orologi atomici trasportati in aereo e, più recentemente, con orologi ottici su distanze verticali di pochi decimetri.

Secondo la relatività generale, il tempo proprio $\tau$ misurato da un orologio in un punto con potenziale gravitazionale U (usando le convenzioni relativistiche dove U è positivo e tende a zero all'infinito) e velocità v è legato al tempo coordinato t da $d\tau/dt = \sqrt{[1 - 2U/c^2 - v^2/c^2]}$, dove c è la velocità della luce. Per precisioni geodetiche, è sufficiente l'approssimazione al primo ordine: $d\tau/dt \approx 1 - U/c^2$. Questo significa che un orologio in un punto con potenziale maggiore (ovvero più lontano dal centro della Terra, a elevazione maggiore) corre più velocemente di un orologio a potenziale minore.

La differenza di frequenza relativa tra due orologi a potenziali U_1 e U_2 è $\Delta f/f = (U_2 - U_1)/c^2$. Per una differenza di altezza di un metro sulla superficie terrestre, la differenza di potenziale è $\Delta U \approx g\,\Delta h \approx 9{,}81\ m^2/s^2$, e la differenza di frequenza relativa è $\Delta f/f \approx 1{,}09 \times 10^{-16}$. Orologi atomici ottici moderni hanno stabilità di frequenza migliore di $10^{-18}$, rendendo questo effetto misurabile e significativo.

Questa connessione tra tempo proprio e potenziale gravitazionale ha implicazioni profonde per la definizione di sistemi di altezze. In principio, le altezze potrebbero essere definite non attraverso misurazioni geometriche o gravimetriche ma attraverso confronti di frequenza tra orologi atomici: due punti sono alla stessa altezza (sulla stessa superficie equipotenziale) se orologi identici in quei punti hanno la stessa frequenza. Questa definizione cronometrica di altezza ha il vantaggio di essere basata su una quantità direttamente misurabile (frequenza) con altissima precisione, senza necessità di integrare misurazioni gravimetriche lungo percorsi che possono accumulare errori.

La rete geodetica del futuro potrebbe essere basata su una rete di orologi atomici ottici fissi e mobili che confrontano continuamente le loro frequenze, permettendo di determinare le differenze di potenziale (e quindi di altezza) con precisioni millimetriche o sub-millimetriche su scale continentali o globali. Questa cronometria geodetica è attualmente un'area di ricerca attiva, con esperimenti pilota in corso in diversi paesi.

La relatività generale ha anche implicazioni per la definizione stessa di geoide. Nella teoria newtoniana, il geoide è una superficie equipotenziale del campo gravitazionale, definita dalla condizione U = U_0 dove U è il potenziale newtoniano. Nella relatività generale, non esiste un singolo potenziale scalare ma un tensore metrico g_{μv} che descrive la geometria dello spazio-tempo. La generalizzazione relativistica del concetto di superficie equipotenziale è una ipersuperficie tridimensionale nello spazio-tempo quadridimensionale su cui il tempo proprio ha un valore costante.

Per la maggior parte delle applicazioni geodetiche pratiche sulla Terra, le correzioni relativistiche al geoide newtoniano sono piccolissime, dell'ordine di micrometri o meno, molto al di sotto della precisione attuale dei modelli geoidali. Tuttavia, per oggetti astronomici con campi gravitazionali molto più forti (stelle di neutroni, buchi neri), o per applicazioni di precisione estrema nel sistema solare (navigazione interplanetaria, test di relatività generale), la formulazione relativistica completa è necessaria.

# Geoide e Ondulazioni Geoidali - Parte XIV

## Frontiere Avanzate, Problemi Inversi Complessi e Questioni Irrisolte nella Geodesia Fisica Contemporanea

## Determinazione del Geoide in Regioni Polari e Problematiche delle Alte Latitudini

Le regioni polari, e in particolare l'Antartide e la Groenlandia coperte da spesse calotte glaciali, presentano sfide uniche per la determinazione del geoide che richiedono metodologie specializzate e considerazioni teoriche aggiuntive. La difficoltà fondamentale deriva dal fatto che queste regioni sono coperte da ghiaccio con spessore che può raggiungere quattromila metri, creando un'ambiguità nella definizione stessa di superficie terrestre e nella collocazione del geoide.

In teoria geodetica classica, il geoide è definito come la superficie equipotenziale del campo gravitazionale che meglio approssima il livello medio degli oceani, estesa idealmente sotto i continenti. Ma sotto le calotte glaciali, non esiste un'interfaccia oceano-atmosfera fisica. Si potrebbe definire il geoide come la superficie equipotenziale che passerebbe per il livello dell'oceano se i ghiacci fossero rimossi e sostituiti da acqua oceanica, ma questa definizione è ambigua perché la rimozione del carico glaciale causerebbe un aggiustamento isostatico che solleverebbe il letto roccioso sottostante di centinaia di metri nel corso di migliaia di anni.

Una definizione operativa più precisa considera il geoide come la superficie equipotenziale che passa per il livello medio globale degli oceani, determinato da osservazioni altimetriche su oceani liberi da ghiaccio, e identifica il valore del potenziale $U_0$ che definisce questa superficie. Questa superficie equipotenziale può poi essere estesa analiticamente sotto le calotte glaciali risolvendo l'equazione di Laplace con condizioni al contorno appropriate.

La determinazione pratica del geoide sotto calotte glaciali richiede misurazioni del campo gravitazionale in queste regioni remote. Le misurazioni gravimetriche terrestri sono estremamente difficili a causa dell'inaccessibilità, delle condizioni climatiche estreme, e della necessità di trasportare strumentazione pesante su ghiaccio in movimento. La gravimetria aerotrasportata offre un'alternativa più pratica, permettendo di raccogliere dati gravitazionali lungo profili di volo che coprono sistematicamente le regioni glaciali.

Tuttavia, la gravimetria aerea in regioni polari presenta sfide tecniche. La navigazione GPS deve funzionare affidabilmente ad alte latitudini dove la geometria della costellazione satellitare è meno favorevole (i satelliti GPS sono tipicamente a latitudini inferiori a 55 gradi, creando una copertura sub-ottimale ai poli). La determinazione accurata dell'altitudine dell'aereo è critica perché la correzione in aria libera è grande (circa 0,3086 mGal per metro), e errori di altitudine di anche pochi metri producono errori significativi nelle anomalie di gravità ridotte al geoide.

Il ghiaccio stesso introduce complicazioni nella riduzione delle osservazioni gravimetriche. La lastra di ghiaccio con spessore $h$ e densità $\rho_{ice} \approx 917$ kg/m³ deve essere trattata nella correzione di Bouguer, ma diversamente dalla roccia, il ghiaccio ha una densità significativamente minore dell'acqua di mare ($\rho_{water} \approx 1.027$ kg/m³). Se si rimuove idealmente il ghiaccio e lo si sostituisce con acqua (che sarebbe la situazione se il ghiaccio si sciogliesse), si ha un cambio di densità $\Delta\rho = \rho_{water} - \rho_{ice} \approx 110$ kg/m³, producendo un cambio nell'anomalia di Bouguer di circa $0{,}0046\ h$ mGal (dove $h$ è in metri). Per ghiaccio spesso tremila metri, questo ammonta a circa 14 mGal, un effetto sostanziale.

La modellazione accurata della topografia sottostante al ghiaccio (il letto roccioso) è essenziale per correzioni topografiche precise. Questo letto roccioso è tipicamente mappato usando radar che penetra il ghiaccio (ice-penetrating radar), che trasmette impulsi elettromagnetici che si riflettono all'interfaccia ghiaccio-roccia. I dati radar forniscono lo spessore del ghiaccio con precisioni tipiche di decine di metri, sufficiente per applicazioni geodetiche regionali ma con margini di incertezza che possono tradursi in incertezze di qualche mGal nelle anomalie di gravità calcolate.

Un ulteriore complicazione è l'aggiustamento isostatico sotto le calotte glaciali. Il peso del ghiaccio deprime la crosta sottostante, creando un'anomalia topografica negativa (il letto roccioso è più basso di quanto sarebbe senza il carico glaciale). Questa depressione è accompagnata da un'anomalia di gravità che riflette sia la topografia del letto sia l'ispessimento crostale compensativo secondo principi isostatici. La separazione di questi effetti richiede modellazione della risposta isostatica, che dipende dalla rigidità litosferica, dalla viscosità del mantello, e dalla storia di carico glaciale, tutte quantità con incertezze significative.

## Problemi Inversi Non Lineari e Regolarizzazione Avanzata

La determinazione del geoide da misurazioni gravimetriche discrete, eterogenee e affette da errori rappresenta un problema inverso non lineare e mal-posto che richiede tecniche di regolarizzazione sofisticate. Oltre ai metodi di regolarizzazione classici come Tikhonov discussi precedentemente, la ricerca moderna in geodesia computazionale ha esplorato tecniche avanzate derivate dall'apprendimento automatico, dall'ottimizzazione convessa, e dalla teoria delle funzioni sparse.

La regolarizzazione mediante variazione totale (total variation regularization), originariamente introdotta nell'elaborazione delle immagini da Rudin, Osher e Fatemi negli anni novanta, è stata adattata ai problemi geodetici. Questa tecnica penalizza la norma L1 del gradiente del campo incognito piuttosto che la norma L2 come nella regolarizzazione di Tikhonov classica. La funzione obiettivo da minimizzare è $\Phi = ||y - Hx||^2 + \lambda ||\nabla x||_1$, dove $||\nabla x||_1 = \sum_i |\nabla x_i|$ è la somma dei valori assoluti del gradiente.

La regolarizzazione a variazione totale favorisce soluzioni con transizioni brevi (discontinuità) piuttosto che variazioni graduali. Questo è appropriato per campi geofisici che hanno strutture con confini geologici netti, come contatti litologici, faglie, o margini di province tettoniche. La minimizzazione della funzione obiettivo non è differenziabile nei punti dove il gradiente è zero, richiedendo algoritmi di ottimizzazione specializzati come metodi di punto prossimale, split Bregman, o metodi primali-duali.

Le tecniche di compressed sensing o campionamento compresso, sviluppate da Candès, Romberg, Tao e Donoho nel primo decennio del ventunesimo secolo, forniscono un framework teorico per la ricostruzione di segnali sparsi da misurazioni incomplete. In geodesia, il campo gravitazionale può essere rappresentato in una base opportuna (per esempio wavelets, curvelet, o armoniche sferiche locali) dove la rappresentazione è sparsa, ovvero solo un numero relativamente piccolo di coefficienti è significativamente diverso da zero.

Il problema di determinazione del geoide può allora essere formulato come minimizzazione di ||y - Hx||² + λ ||x||_1 o, più generalmente, ||y - Hx||² + λ ||Ψx||_1, dove Ψ è una trasformata che porta x in una rappresentazione sparsa. La teoria del compressed sensing garantisce che, sotto condizioni appropriate sulla matrice di misura H (principalmente la proprietà di isometria ristretta, RIP), la soluzione può essere ricostruita esattamente (in assenza di rumore) o con alta accuratezza (in presenza di rumore) da un numero di misurazioni molto inferiore alla dimensione del segnale.

Queste tecniche hanno applicazioni promettenti in geodesia, specialmente per la ricostruzione del campo gravitazionale in regioni con copertura di dati molto sparsa. Per esempio, determinare il geoide in regioni remote dell'Africa o dell'Amazzonia dove le stazioni gravimetriche sono separate da centinaia di chilometri potrebbe beneficiare di metodi di compressed sensing che sfruttano la sparsità del campo in opportune rappresentazioni.

Un altro sviluppo importante è l'uso di reti neurali profonde (deep neural networks) per problemi inversi geodetici. Le reti neurali possono essere addestrate su dataset sintetici generati da modelli diretti del campo gravitazionale per apprendere la mappatura non lineare da osservazioni gravimetriche a distribuzioni di densità o a ondulazioni geoidali. Una volta addestrata, la rete può effettuare predizioni rapide su nuovi dati, potenzialmente catturando relazioni non lineari complesse che sono difficili da modellare con metodi tradizionali.

Tuttavia, l'applicazione di tecniche di deep learning in geodesia è ancora in fase esplorativa e solleva questioni circa l'interpretabilità fisica delle soluzioni, la generalizzazione a situazioni non rappresentate nel training set, e la quantificazione rigorosa delle incertezze. Approcci bayesiani che combinano reti neurali con modellazione probabilistica (Bayesian neural networks) offrono un percorso per incorporare stime di incertezza, ma rimangono computazionalmente costosi e matematicamente complessi.

## Determinazione Locale del Geoide e Integrazione con Sistemi di Riferimento Verticali Nazionali

Mentre i modelli geoidali globali come EGM2008 forniscono copertura planetaria con accuratezza tipicamente decimetrica, molte applicazioni geodetiche nazionali o regionali richiedono precisioni centimetriche su scale più piccole. Questa esigenza ha spinto lo sviluppo di metodologie per la determinazione locale del geoide che integrano dati gravimetrici terrestri densi, punti di controllo GPS/livellazione, e modelli globali come informazione a priori.

Il concetto chiave è utilizzare il modello globale per catturare le strutture a lunga lunghezza d'onda del campo gravitazionale (che sono ben determinate da dati satellitari) e affinare il modello aggiungendo correzioni ad alta risoluzione derivate da dati locali. Questo approccio, noto come remove-compute-restore nel contesto della determinazione geoidale, consiste in tre passi: rimuovere l'effetto del modello globale dai dati locali, calcolare una correzione geoidale residua dai dati residui usando formule appropriate (tipicamente una versione modificata della formula di Stokes), e ripristinare il modello globale per ottenere il geoide locale completo.

Matematicamente, se N_global è l'ondulazione geoidale dal modello globale e N_local è la ondulazione da determinare, si calcolano anomalie di gravità residue Δg_res = Δg_obs - Δg_global, dove Δg_obs sono le anomalie osservate localmente e Δg_global sono quelle predette dal modello globale. Si applica poi la formula di Stokes (o una variante modificata) alle anomalie residue per ottenere N_res, e si combina: N_local = N_global + N_res.

Questo approccio ha il vantaggio di lavorare con quantità residue che sono molto più piccole e più lisce delle quantità assolute, migliorando la convergenza degli integrali e riducendo gli errori di troncamento. Inoltre, eventuali errori o bias nel modello globale a lunga lunghezza d'onda vengono automaticamente rimossi dalle quantità residue, a patto che il modello globale abbia caratteristiche di errore compatibili con i dati locali.

L'integrazione con i sistemi di riferimento verticali nazionali è una questione pratica di grande importanza. La maggior parte dei paesi mantiene reti di livellazione di precisione che definiscono il sistema di altezze ortometriche ufficiale, con capisaldi distribuiti su tutto il territorio nazionale. Questi capisaldi hanno altezze ortometriche determinate mediante livellazione geometrica connessa a un mareografo di riferimento che definisce lo zero del sistema.

Il problema è che questi sistemi di riferimento verticali nazionali non sono necessariamente consistenti tra loro (ogni paese ha il proprio mareografo e le proprie convenzioni) e non sono necessariamente consistenti con un modello geoidale globale che definisce un geoide globalmente consistente. Inoltre, i sistemi nazionali possono contenere errori sistematici accumulati nel corso di decenni di livellazioni, biases dovuti a variazioni temporali del livello del mare ai mareografi, o inconsistenze dovute a aggiustamenti di rete non ottimali.

Per rendere un modello geoidale locale compatibile con il sistema di riferimento verticale nazionale, si deve spesso applicare una trasformazione (tipicamente un polinomio a basso ordine o una superficie di trend) che allinea il modello geoidale ai punti di controllo GPS/livellazione. Se h_i è l'altezza ellissoidica GPS e H_i l'altezza ortometrica da livellazione in un punto di controllo i, l'ondulazione geoidale osservata è N_i^obs = h_i - H_i. La differenza tra questo e il modello geoidale N_i^model rappresenta il misfit che deve essere minimizzato attraverso la trasformazione.

Il modello trasformato è N_local^fit(x,y) = N_local(x,y) + T(x,y), dove T(x,y) è una funzione di correzione determinata mediante regressione ai minimi quadrati sui punti di controllo. Tipicamente, T è scelta come un polinomio bidimensionale di ordine basso (tipicamente 1 o 2): $T(x,y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy + a_4 x^2 + a_5 y^2$, dove i coefficienti $a_i$ sono determinati minimizzando $\sum_i [N_i^{obs} - N_{local}(x_i, y_i) - T(x_i, y_i)]^2$.

Questo fitting introduce inevitabilmente una contaminazione del modello geoidale con errori sistematici del sistema di altezze nazionale, un compromesso necessario per applicazioni pratiche che richiedono compatibilità con infrastrutture geodetiche esistenti. Un obiettivo a lungo termine della comunità geodetica internazionale è l'armonizzazione dei sistemi di riferimento verticali nazionali in un sistema globale unificato basato su un geoide globalmente consistente determinato da dati satellitari e terrestri integrati.

## Monitoraggio delle Variazioni Temporali del Geoide e Applicazioni alla Scienza del Clima

Come discusso precedentemente, il campo gravitazionale e il geoide non sono statici ma variano nel tempo a causa di redistribuzioni di massa associate a processi geofisici e climatici. Il monitoraggio sistematico di queste variazioni attraverso osservazioni ripetute nel tempo ha aperto nuove frontiere nella geodesia applicata alle scienze del clima e del sistema Terra.

Le missioni GRACE e GRACE Follow-On forniscono mappe mensili del campo gravitazionale terrestre con risoluzione spaziale dell'ordine di trecentocinquecento chilometri. L'analisi delle serie temporali di queste mappe rivela variazioni stagionali, interannuali e a lungo termine (trend) in diverse regioni. Le variazioni stagionali sono principalmente associate al ciclo idrologico: accumulo di neve e ghiaccio in inverno e fusione in estate, variazioni nell'umidità del suolo e nel livello delle acque superficiali, variazioni stagionali nello stoccaggio di acque sotterranee.

L'ampiezza delle variazioni stagionali del campo gravitazionale può essere sorprendente. Nei grandi bacini fluviali come l'Amazzonia, il Congo, il Gange-Brahmaputra, le variazioni stagionali dell'anomalia di gravità raggiungono decine di µGal, corrispondenti a variazioni dell'ondulazione geoidale di qualche millimetro. Queste variazioni sono causate da cambiamenti nell'immagazzinamento totale di acqua dell'ordine di dieci-ventimila chilometri cubi, equivalente a uno strato d'acqua di dieci-venti centimetri su aree di milioni di chilometri quadrati.

I trend a lungo termine osservati da GRACE sono di particolare interesse per gli studi climatici. In Groenlandia, la perdita accelerata di massa glaciale è chiaramente visibile come un trend negativo dell'anomalia di gravità, quantificabile in termini di massa persa per anno attraverso inversione delle osservazioni gravitazionali. Studi hanno stimato che la perdita di massa della Groenlandia è aumentata da circa 150 Gt/anno nel periodo 2002-2006 a circa 280 Gt/anno nel periodo 2007-2012, un'accelerazione significativa correlata con l'aumento delle temperature estive e con l'intensificazione della fusione superficiale.

In Antartide, la situazione è più complessa e regionale. Mentre alcune regioni (in particolare la Penisola Antartica occidentale e la parte occidentale della calotta antartica) mostrano perdite di massa significative, altre regioni (parti dell'Antartide orientale) mostrano guadagni di massa dovuti all'aumento delle precipitazioni nevose. Il bilancio di massa totale dell'Antartide è negativo ma con incertezze maggiori rispetto alla Groenlandia a causa della maggiore estensione geografica e della complessità dei processi glaciologici coinvolti.

Le regioni con intensa attività di estrazione di acque sotterranee per irrigazione agricola o uso urbano mostrano trend negativi nelle osservazioni GRACE, indicativi di deplezione delle falde acquifere. Casi studiati includono la pianura del Nord della Cina, la pianura del Gange in India, l'acquifero High Plains negli Stati Uniti, e la Central Valley in California. Queste osservazioni forniscono vincoli quantitativi sulle velocità di deplezione che sono difficili da ottenere con metodi idrologici tradizionali, specialmente in regioni dove i dati di pozzi sono scarsi o inaccessibili.

Il recupero post-glaciale isostatico, la risposta a lungo termine della Terra solida alla rimozione dei carichi glaciali pleistocenici, produce trend di gravità misurabili in regioni come la Fennoscandia, il Canada settentrionale, e l'Alaska. Le osservazioni GRACE di questi trend forniscono vincoli sulla viscosità del mantello terrestre, un parametro chiave nella reologia del mantello che è difficile da determinare con altri metodi. Inversioni delle osservazioni GRACE del recupero post-glaciale hanno suggerito valori di viscosità del mantello superiore dell'ordine di $10^{21}$ Pa·s, consistenti ma raffinando le stime da altre tecniche geofisiche.

## Geoide Oceanico, Topografia Dinamica e Circolazione Oceanica

La determinazione accurata del geoide sugli oceani è essenziale per studiare la circolazione oceanica e il trasporto di calore negli oceani, processi chiave nel sistema climatico terrestre. La superficie degli oceani non coincide con il geoide ma devia da esso a causa di effetti dinamici: correnti, variazioni di densità dell'acqua dovute a temperatura e salinità, effetti del vento e della pressione atmosferica. Queste deviazioni, chiamate topografia dinamica oceanica (dynamic ocean topography, DOT o talvolta indicata con η), sono tipicamente dell'ordine di uno-due metri ma contengono informazioni fondamentali sulla circolazione.

L'altimetria satellitare misura l'altezza della superficie oceanica rispetto all'ellissoide di riferimento (sea surface height, SSH). La relazione tra queste quantità è $SSH = N + \eta$, dove N è l'ondulazione geoidale. Per determinare la topografia dinamica, si deve sottrarre il geoide dalla SSH: $\eta = SSH - N$. Questo richiede che il geoide sia noto con accuratezza comparabile o superiore all'ampiezza della topografia dinamica, ovvero con precisioni di pochi centimetri su scale spaziali di cento-mille chilometri.

Prima delle missioni gravimetriche satellitari dedicate, il geoide oceanico era il principale fattore limitante nell'accuratezza della DOT derivata da altimetria. I modelli geoidali da dati terrestri e satellitari pre-GRACE avevano incertezze dell'ordine di dieci-venti centimetri su scale di poche centinaia di chilometri, comparabili all'ampiezza del segnale oceanografico. Con GRACE e GOCE, il geoide oceanico è ora noto con incertezze tipiche di due-cinque centimetri su scale di cento chilometri, permettendo una determinazione molto più affidabile della DOT.

La topografia dinamica è legata alla velocità delle correnti oceaniche geostrofiche attraverso l'equilibrio geostrofico, che afferma che il gradiente orizzontale di pressione (manifestato come pendenza della superficie oceanica) è bilanciato dalla forza di Coriolis dovuta alla rotazione terrestre. Matematicamente, le componenti della velocità geostr ofica sono $u_g = -(g/f)\,\partial\eta/\partial y$ e $v_g = (g/f)\,\partial\eta/\partial x$, dove g è l'accelerazione di gravità, $f = 2\Omega \sin(\varphi)$ è il parametro di Coriolis (con Ω velocità angolare terrestre e φ latitudine), e x, y sono coordinate orizzontali est e nord.

Questo significa che una pendenza della superficie oceanica di un metro su mille chilometri (1 mm/km) produce una velocità geostr ofica di circa 0,1 m/s alle latitudini medie, una corrente oceanica significativa. Le grandi correnti oceaniche come la Corrente del Golfo nell'Atlantico settentrionale, la Corrente di Kuroshio nel Pacifico settentrionale, o la Corrente Circumpolare Antartica sono associate a forti gradienti di topografia dinamica visibili chiaramente nelle mappe altimetriche.

La combinazione di altimetria satellitare con modelli geoidali accurati ha rivoluzionato l'oceanografia fisica, permettendo di monitorare la circolazione oceanica globale con copertura spaziale e temporale senza precedenti. Le mappe di DOT derivate da questa combinazione sono utilizzate per: validare e migliorare modelli di circolazione oceanica numerici; monitorare la variabilità della circolazione termoalina (la circolazione oceanica guidata da differenze di densità legate a temperatura e salinità); studiare i vortici oceanici mesoscala che giocano un ruolo chiave nel trasporto di calore, sale e sostanze chimiche; e monitorare il livello medio del mare e le sue variazioni regionali.

Un risultato significativo è la scoperta che il livello del mare non sale uniformemente su tutto il globo in risposta al riscaldamento climatico, ma mostra pattern regionali complessi con alcune regioni che sperimentano aumenti molto maggiori della media globale e altre aumenti minori o addirittura diminuzioni locali. Questi pattern sono causati da variazioni nella circolazione oceanica, da effetti di riscaldamento termico differenziale, da variazioni nella salinità, e da effetti gravitazionali dovuti alla redistribuzione di massa dai ghiacci terrestri agli oceani.

## Questioni Aperte e Direzioni di Ricerca Futura

Nonostante i progressi straordinari nella determinazione del geoide negli ultimi decenni, rimangono numerose questioni aperte e sfide che definiscono le frontiere della ricerca geodetica contemporanea. Queste sfide spaziano da problemi teorici fondamentali a questioni pratiche legate all'integrazione di tecnologie emergenti.

Una questione teorica fondamentale riguarda la definizione rigorosa del geoide in presenza di cavità e disomogeneità interne significative. La teoria classica assume che il geoide sia una superficie equipotenziale unica e semplicemente connessa. Ma la Terra contiene cavità piene di fluidi (oceani sotterranei, camere magmatiche) e discontinuità di densità brevi (faglie, contatti litologici). In principio, le superfici equipotenziali potrebbero avere topologie complesse in presenza di tali disomogeneità. Sebbene questi effetti siano probabilmente trascurabili per la Terra reale, una teoria completamente rigorosa richiederebbe un trattamento più sofisticato.

Dal punto di vista computazionale, l'integrazione efficiente di dataset geodetici massivi (miliardi di osservazioni da satelliti, milioni di misurazioni terrestri) in modelli geoidali ad altissima risoluzione (gradi armonici superiori a 2.000, corrispondenti a risoluzione di dieci chilometri) rimane una sfida. Algoritmi paralleli e distribuiti, tecniche di compressione di dati, e rappresentazioni gerarchiche multilivello sono aree di sviluppo attivo.

L'integrazione della gradiometria gravitazionale con altre tecniche geofisiche (sismologia, geomagnetismo, geodinamica) in schemi di inversione multi-fisica accoppiata rappresenta una frontiera promettente. Il potenziale per vincolare simultaneamente la distribuzione di densità, le proprietà elastiche, la temperatura, e la composizione del mantello terrestre attraverso inversione congiunta di dati complementari è enorme, ma i framework computazionali e teorici per realizzare questa visione sono ancora in sviluppo.

La questione della definizione e realizzazione di un sistema di riferimento verticale globale unificato basato sul potenziale gravitazionale piuttosto che su mareografi locali è di importanza pratica crescente. L'IHRS (International Height Reference System), adottato

dall'Associazione Internazionale di Geodesia nel 2015, fornisce un framework concettuale, ma la sua realizzazione pratica attraverso una rete globale di stazioni con valori di potenziale accuratamente determinati rimane un work in progress che richiederà coordinazione internazionale sostenuta.

L'applicazione di tecnologie quantistiche emergenti alla geodesia, inclusi gravimetri atomici basati su interferometria atomica, orologi atomici ottici con precisione $10^{-18}$, e sensori quantistici di rotazione, promette di rivoluzionare ulteriormente la precisione delle misurazioni geodetiche. Ma l'integrazione di queste tecnologie in reti operative robuste e la traduzione delle loro capacità di laboratorio in strumenti geodetici pratici richiederà sviluppi ingegneristici significativi.

Infine, la questione di come interpretare le variazioni temporali del geoide osservate da GRACE e missioni future in termini di processi fisici sotterranei rimane parzialmente aperta. Mentre alcune variazioni (fusione dei ghiacci, variazioni idrologiche superficiali) sono relativamente ben comprese, altre (variazioni nel mantello profondo, accoppiamenti dinamici nucleo-mantello) sono molto meno chiare. Lo sviluppo di modelli fisici avanzati che collegano le osservazioni gravitazionali alle dinamiche interne della Terra richiederà progressi nella reologia, nella termodinamica ad alte pressioni, e nella modellazione numerica della convezione mantellica.

In conclusione, la geodesia fisica del ventunesimo secolo si trova in una posizione straordinariamente fertile, con capacità osservative senza precedenti, framework teorici sempre più sofisticati, e connessioni sempre più strette con una vasta gamma di discipline scientifiche dalle scienze del clima alla fisica fondamentale. Il geoide, quel concetto apparentemente semplice di una superficie equipotenziale che meglio rappresenta la "forma" fisica della Terra, continua a essere al centro di questa ricchezza scientifica, fungendo da ponte tra la geometria astratta e la fisica tangibile del nostro pianeta dinamico.

# Geoide e Ondulazioni Geoidali - Parte XV

## Teoria Avanzata delle Maree Terrestri e Oceaniche e Loro Effetti sul Geoide

### Fondamenti Fisici del Potenziale di Marea e Sviluppo in Armoniche Sferiche

Le maree terrestri e oceaniche rappresentano uno dei fenomeni geodinamici più pervasivi e meglio compresi che influenzano il campo gravitazionale terrestre e la forma del geoide. La teoria delle maree affonda le sue radici nei lavori pionieristici di Isaac Newton, che nel suo Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica del 1687 dimostrò che le maree oceaniche sono causate dalla variazione spaziale della forza gravitazionale esercitata dalla Luna e dal Sole sulla Terra. Questa teoria fu successivamente raffinata da Pierre-Simon Laplace nel diciottesimo secolo, che sviluppò le equazioni dinamiche delle maree oceaniche, e da

George Howard Darwin, Lord Kelvin e altri scienziati vittoriani che estesero la teoria alle deformazioni della Terra solida.

Il potenziale di marea generato da un corpo celeste esterno (tipicamente la Luna o il Sole) in un punto sulla superficie terrestre può essere derivato rigorosamente dalla teoria del potenziale gravitazionale newtoniano. Consideriamo la Luna come corpo perturbante, con massa M_L posizionata a distanza r_L dal centro della Terra. Il potenziale gravitazionale della Luna in un punto P sulla superficie terrestre a distanza r dal centro terrestre e con vettore posizione r rispetto al centro è dato da V_L(r) = -G M_L / |r_L - r|, dove G è la costante gravitazionale universale.

Per sviluppare questo potenziale in una forma utilizzabile, si sfrutta il fatto che la distanza Terra-Luna r_L è molto maggiore del raggio terrestre R (circa sessanta raggi terrestri per la Luna). Questo permette un'espansione in serie di potenze del rapporto R/r_L. Utilizzando il teorema di addizione per i polinomi di Legendre, il potenziale può essere scritto come V_L(r, θ) = -G M_L / r_L ∑_{n=0}^{∞} (R/r_L)^n P_n(cos ψ), dove ψ è l'angolo tra il vettore Terra-Luna e il vettore dal centro della Terra al punto P, e P_n sono i polinomi di Legendre.

Il termine di grado zero (n = 0) in questa espansione rappresenta l'attrazione gravitazionale uniforme della Luna sul centro di massa della Terra e non produce deformazioni o maree. Il termine di grado uno (n = 1) rappresenta un'accelerazione uniforme di tutta la Terra verso la Luna, che è cancellata nel sistema di riferimento geocentrico accelerato. I termini significativi per le maree iniziano con il grado due (n = 2), che rappresenta il gradiente del campo gravitazionale lunare attraverso il corpo terrestre.

Il potenziale di marea di grado due è V_2 = (G M_L / r_L) (R/r_L)^2 P_2(cos ψ), dove P_2(x) = (3x^2 - 1)/2 è il secondo polinomio di Legendre. Sostituendo e semplificando, si ottiene V_2 = (G M_L R^2 / r_L^3) (3 cos^2 ψ - 1)/2. Questo potenziale può essere espresso in funzione delle coordinate sferiche (r, θ, λ) del punto P e delle coordinate della Luna (declinazione δ_L e angolo orario h_L) come V_2 = (G M_L R^2 / r_L^3) [P_{20}(sin φ) P_{20}(sin δ_L) + P_{22}(sin φ) P_{22}(sin δ_L) cos(2(λ - λ_L))], dove φ è la latitudine geocentrica del punto, λ la sua longitudine, e λ_L la longitudine della Luna.

Questa espressione rivela che il potenziale di marea di grado due consiste in una componente zonale (dipendente solo dalla latitudine) e una componente tesseral di ordine due (dipendente sia dalla latitudine sia dalla longitudine). La componente zonale produce una deformazione prolata con rigonfiamenti ai poli e all'equatore paralleli alla direzione Terra-Luna. La componente tesseral produce rigonfiamenti lungo il meridiano della Luna e il meridiano opposto, con depressioni lungo i meridiani a novanta gradi.

L'ampiezza del potenziale di marea lunare di grado due è dell'ordine di V_2 ≈ (G M_L R^2 / r_L^3) ≈ 0,56 m^2/s^2. Per confronto, il potenziale gravitazionale terrestre alla superficie è dell'ordine di G M_E / R ≈ 6,3 × 10^7 m^2/s^2, quindi il potenziale di marea è circa dieci milioni di volte più piccolo. Nonostante questa piccolezza relativa, il potenziale di marea produce effetti misurabili e significativi.

Il Sole contribuisce similmente al potenziale di marea, ma con ampiezza ridotta. Sebbene la massa del Sole sia circa ventisette milioni di volte maggiore di quella della Luna, la sua distanza è circa 460 volte maggiore. Poiché il potenziale di marea scala come M/r^3, il

contributo solare è ridotto di un fattore (M_S/M_L) × (r_L/r_S)^3 ≈ (2,7 × 10^7) × (1/460)^3 ≈ 0,46 rispetto al contributo lunare. Il potenziale di marea solare ha quindi ampiezza circa il quarantasei % di quello lunare.

La combinazione dei potenziali di marea lunare e solare produce un potenziale totale che varia con periodicità complesse determinate dai moti orbitali della Luna e della Terra. Le componenti principali hanno periodi semidiurni (circa dodici ore e venticinque minuti per la componente lunare M_2, dodici ore per la componente solare S_2), diurni (ventiquattro ore e cinquanta minuti per K_1 e O_1), e a lungo periodo (quattordici giorni per la marea quindicinale M_f, che modula l'ampiezza delle maree semidiurne tra maree vive e maree morte).

Lo sviluppo completo del potenziale di marea include termini di grado superiore (n = 3, 4, ...) che sono progressivamente più piccoli ma non completamente trascurabili per applicazioni di precisione estrema. Il termine di grado tre ha ampiezza circa (R/r_L) volte il termine di grado due, ovvero circa l'1,6%, corrispondente a pochi millimetri di deformazione. I termini di grado quattro e superiori sono generalmente trascurabili per la maggior parte delle applicazioni geodetiche, ma possono essere rilevanti per studi di fisica fondamentale o per verifiche di teoria gravitazionale ad altissima precisione.

## Risposta Elastica della Terra Solida e Numeri di Love

Quando il potenziale di marea esterno viene applicato alla Terra, il corpo terrestre risponde deformandosi elasticamente. Questa deformazione modifica la distribuzione di massa, che a sua volta genera un potenziale gravitazionale addizionale. La risposta completa della Terra al potenziale di marea include quindi sia gli effetti diretti del potenziale esterno sia gli effetti indiretti della redistribuzione di massa causata dalla deformazione.

La teoria della risposta elastica della Terra alle forze di marea fu sviluppata sistematicamente da Augustus Edward Hough Love nei primi del ventesimo secolo. Love introdusse una parametrizzazione della risposta attraverso tre numeri adimensionali, ora chiamati numeri di Love, che caratterizzano completamente la deformazione per un modello sferico elastico stratificato della Terra.

Il numero di Love h (talvolta chiamato numero di Love verticale o radiale) descrive la deformazione verticale della superficie. Se il potenziale di marea esterno è V_tide, lo spostamento radiale della superficie è δr = h (V_tide / g), dove g è l'accelerazione di gravità superficiale. Il numero h è adimensionale e per la Terra ha valore approssimativamente h ≈ 0,6 per le maree di grado due. Questo significa che una deformazione di "equilibrio" (la deformazione che si avrebbe se la Terra fosse un fluido perfetto) di ampiezza V_tide / g viene ridotta di un fattore di circa 1,67 dalla rigidità elastica della Terra solida.

Il numero di Love k descrive il potenziale gravitazionale addizionale generato dalla redistribuzione di massa causata dalla deformazione. Il potenziale totale (esterno più indotto) è V_total = (1 + k) V_tide. Il numero k per la Terra ha valore approssimativamente k ≈ 0,3, indicando che il potenziale indotto dalla deformazione è circa il trenta % del potenziale esterno. Il potenziale totale è quindi circa 1,3 volte il potenziale esterno applicato.

Il numero di Love l (talvolta chiamato numero di shear o tangenziale) descrive gli spostamenti orizzontali della superficie. Lo spostamento orizzontale in direzione di massima pendenza del potenziale di marea è δs = l (V_tide / g) × (1/R), dove R è il raggio terrestre. Per la Terra, l ≈ 0,08, molto più piccolo di h, indicando che la risposta è dominata dalle deformazioni verticali.

Questi numeri di Love non sono costanti universali ma dipendono dalla struttura interna della Terra, in particolare dalla distribuzione di densità, dalla rigidità elastica (modulo di taglio), e dalla compressibilità (modulo di bulk) in funzione della profondità. I valori citati (h ≈ 0,6, k ≈ 0,3, l ≈ 0,08) sono valori medi per le maree di grado due, ma i numeri di Love dipendono dal grado armonico n del potenziale di marea applicato e dalla frequenza (per deformazioni visco-elastiche o anelastiche).

La dipendenza dal grado armonico riflette il fatto che deformazioni con lunghezze d'onda diverse penetrano a profondità diverse nella Terra. Le maree di grado due hanno lunghezze d'onda dell'ordine del raggio terrestre e sono sensibili alla struttura attraverso tutto il mantello e il nucleo. Le maree di grado tre hanno lunghezze d'onda più corte e sono principalmente sensibili al mantello superiore. Per gradi molto alti, la deformazione diventa sempre più superficiale e localizzata.

La dipendenza dalla frequenza emerge perché i materiali terrestri, specialmente nel mantello, non sono perfettamente elastici ma hanno componenti anelastiche (attrito interno) e visco-elastiche. Su scale temporali brevi (ore, come per le maree semidiurne), la Terra si comporta approssimativamente come un solido elastico. Su scale temporali lunghe (mesi, anni, millenni), processi visco-elastici diventano importanti, permettendo al materiale di fluire lentamente. Questo è evidente nel fenomeno del recupero post-glaciale isostatico, dove la Terra continua ad aggiustarsi alla rimozione dei carichi glaciali pleistocenici migliaia di anni dopo la fusione dei ghiacci.

La determinazione accurata dei numeri di Love richiede modelli dettagliati della struttura interna terrestre. I modelli sismologici standard come PREM (Preliminary Reference Earth Model), sviluppato da Adam Dziewonski e Don Anderson nel 1981, forniscono profili radiali di densità, velocità sismica, e moduli elastici che possono essere utilizzati per calcolare i numeri di Love teorici. Questi calcoli richiedono la soluzione di equazioni differenziali ordinarie accoppiate (le equazioni di deformazione elastica in geometria sferica) con condizioni al contorno appropriate alla superficie (superficie libera, nessuna trazione) e al centro (regolarità).

I numeri di Love teorici calcolati da modelli come PREM sono h = 0,6032, k = 0,2980, l = 0,0839 per le maree di grado due a frequenza semidiurna. Questi valori teorici sono in eccellente accordo con le stime empiriche derivate da osservazioni geodetiche (estensimetri, inclinometri, gravimetri superconduttori, osservazioni GPS), validando sia la teoria elastica sia i modelli sismologici della struttura terrestre.

## Maree Oceaniche: Equazioni di Laplace e Teoria Dinamica

Le maree oceaniche sono molto più complesse delle maree terrestri a causa della natura fluida degli oceani e della geometria irregolare dei bacini oceanici. Mentre la Terra solida risponde al potenziale di marea quasi istantaneamente ed elasticamente, gli oceani

rispondono con ritardi di fase, risonanze, e dissipazioni viscose che dipendono fortemente dalla batimetria e dalla geometria delle coste.

La teoria dinamica delle maree oceaniche fu sviluppata da Pierre-Simon Laplace nel suo monumentale Traité de Mécanique Céleste pubblicato tra il 1799 e il 1825. Laplace formulò le equazioni differenziali parziali che governano il movimento di uno strato fluido su una sfera rotante sotto l'influenza di forze di marea, ora note come equazioni di Laplace delle maree.

Le equazioni fondamentali sono le equazioni del momento orizzontale e l'equazione di continuità (conservazione della massa). In forma semplificata per onde di piccola ampiezza (assunzione di linearità), trascurando attrito e in coordinate sferiche, le equazioni sono: $\partial u/\partial t - 2\Omega \sin(\varphi)\, v = -g\, \partial\eta/\partial(R \cos\varphi\, \partial\lambda) + (1/R \cos\varphi)\, \partial V_{tide}/\partial\lambda$; $\partial v/\partial t + 2\Omega \sin(\varphi)\, u = -g\, \partial\eta/(R\, \partial\varphi) + (1/R)\, \partial V_{tide}/\partial\varphi$; $\partial\eta/\partial t + (1/(R \cos\varphi))\, [\partial(H\, u \cos\varphi)/\partial\lambda + \partial(H\, v)/\partial\varphi] = 0$, dove u e v sono le componenti di velocità orizzontale nelle direzioni est e nord, η è l'elevazione della superficie oceanica rispetto al livello medio, H è la profondità oceanica media, φ è la latitudine, λ la longitudine, R il raggio terrestre, Ω la velocità angolare di rotazione terrestre, g l'accelerazione di gravità, e $V_{tide}$ il potenziale di marea.

Queste equazioni sono straordinariamente complesse da risolvere analiticamente per bacini oceanici reali con batimetria irregolare e geometrie costiere complesse. Laplace stesso riuscì a trovare soluzioni analitiche solo per casi molto idealizzati, come un oceano globale di profondità uniforme su una sfera senza continenti. Per oceani reali, è necessario ricorrere a metodi numerici.

Una caratteristica chiave delle equazioni di Laplace è la presenza dei termini di Coriolis $2\Omega \sin(\varphi)\, v$ e $2\Omega \sin(\varphi)\, u$, che rappresentano la deviazione delle correnti dovuta alla rotazione terrestre. Questi termini causano la rotazione delle onde di marea in senso antiorario nell'emisfero nord e orario nell'emisfero sud, creando sistemi di onde anfidromiche dove l'ampiezza della marea è zero in punti nodali (punti anfidromici) e le linee di uguale fase (cotidal lines) si irradiano da questi punti.

La risonanza oceanica gioca un ruolo cruciale nell'amplificazione delle maree. Bacini oceanici o mari marginali possono avere frequenze naturali di oscillazione (modi propri) che coincidono approssimativamente con le frequenze delle componenti di marea (principalmente semidiurna e diurna). Quando si verifica questa risonanza, le ampiezze di marea possono essere amplificate drammaticamente. L'esempio più spettacolare è la Baia di Fundy in Canada, dove la risonanza del bacino con la marea semidiurna produce ampiezze di marea superiori a quindici metri, le più alte al mondo.

La dissipazione di energia nelle maree oceaniche avviene principalmente attraverso attrito sul fondo oceanico in acque poco profonde e attraverso generazione di onde interne di marea (internal tides) dove le correnti di marea interagiscono con la topografia sottomarina, generando onde che si propagano nel volume oceanico e che alla fine dissipano la loro energia per rottura e mixing turbolento. La dissipazione totale di energia mareale negli oceani terrestri è stimata essere circa 3,7 terawatt (1 TW = 10^12 watt), di cui circa 2,5 TW sono attribuiti alla marea lunare $M_2$ e il resto distribuito su altre componenti.

Questa dissipazione di energia ha conseguenze astronomiche e geodinamiche profonde. L'energia viene estratta dall'energia orbitale del sistema Terra-Luna, causando un graduale allontanamento della Luna dalla Terra (circa 3,82 centimetri per anno) e un rallentamento della rotazione terrestre (aumento della lunghezza del giorno di circa 2,3 millisecondi per secolo). Questi effetti sono misurabili con altissima precisione attraverso tecniche di geodesia spaziale come il Lunar Laser Ranging (che misura la distanza Terra-Luna riflettendo laser su retroriflettori posti sulla Luna dalle missioni Apollo) e l'analisi delle orbite satellitari.

## Modelli di Marea Oceanica Globali e Validazione Altimetrica

Lo sviluppo di modelli accurati delle maree oceaniche globali è essenziale per molte applicazioni geodetiche e oceanografiche. Questi modelli sono necessari per correggere le osservazioni altimetriche satellitari, per determinare il geoide oceanico attraverso la separazione della topografia dinamica, per studiare la circolazione oceanica, e per interpretare le variazioni del campo gravitazionale osservate da missioni come GRACE.

I moderni modelli di marea globali si dividono in due categorie principali: modelli puramente idrodinamici e modelli empirici o semi-empirici. I modelli idrodinamici risolvono numericamente le equazioni di Laplace (o loro varianti più complete che includono attrito, termini non lineari, e stratificazione oceanica) su una griglia che copre gli oceani globali con risoluzione spaziale tipica di un quarto di grado o migliore. Le forzanti sono il potenziale di marea astronomico e le deformazioni della Terra solida (incorporando i numeri di Love). I parametri liberi includono coefficienti di attrito, schemi di parametrizzazione della turbolenza, e trattamento delle condizioni al contorno costiere.

I modelli empirici, al contrario, utilizzano direttamente le osservazioni altimetriche per determinare le componenti di marea attraverso analisi armonica dei dati. Poiché i satelliti altimetrici ripetono le loro orbite con periodi precisi (per esempio, dieci giorni per TOPEX/Poseidon, trentacinque giorni per ERS), le serie temporali altimetriche in ciascun punto della griglia oceanica contengono campionamenti delle maree a fasi diverse. Mediante analisi armonica (fitting di sinusoidi con frequenze corrispondenti alle componenti di marea principali), si possono estrarre le ampiezze e fasi di queste componenti.

I modelli di marea attualmente più utilizzati includono FES2014 (Finite Element Solution 2014), sviluppato da LEGOS/CNES in Francia; TPXO9 (sviluppato da Oregon State University); GOT4.10 (Goddard Ocean Tide model); e DTU10 (Technical University of Denmark). Questi modelli forniscono ampiezze e fasi per le componenti di marea principali (tipicamente quindici-trenta componenti, incluse semidiurne M_2, S_2, N_2, K_2; diurne K_1, O_1, P_1, Q_1; e a lungo periodo M_f, M_m, S_sa) su griglie con risoluzione spaziale di 1/8 di grado o migliore.

L'accuratezza di questi modelli è validata mediante confronto con osservazioni indipendenti da mareografi costieri e da boe oceanografiche. Nei principali bacini oceanici aperti, l'accuratezza è tipicamente di pochi centimetri RMS (root mean square) per le componenti principali. In regioni costiere poco profonde con batimetria complessa, l'accuratezza degrada a dieci-venti centimetri o più a causa della difficoltà di modellare accuratamente la fisica delle maree in queste regioni.

Un risultato notevole dell'altimetria satellitare combinata con modelli di marea è la scoperta di "maree interne di grande ampiezza" generate dalla conversione di energia mareale barotropica (che coinvolge l'intera colonna d'acqua) in energia mareale baroclinica (onde interne che si propagano lungo le superfici di uguale densità nell'oceano stratificato). Queste onde interne possono avere ampiezze di decine di metri sotto la superficie e producono segnali superficiali di alcuni centimetri che sono rilevabili con altimetria ad alta risoluzione.

## Effetti delle Maree sul Geoide e Correzioni Geodetiche

Le maree, sia terrestri sia oceaniche, influenzano le determinazioni geoidali in modi sottili ma significativi che devono essere considerati per applicazioni di alta precisione. Gli effetti principali sono tre: la deformazione periodica della superficie fisica della Terra (maree terrestri), lo spostamento periodico della massa oceanica (maree oceaniche), e gli effetti di carico (loading) dovuti al peso variabile degli oceani sulla Terra solida.

La deformazione di marea terrestre produce una variazione periodica dell'ondulazione geoidale con ampiezza tipica di pochi centimetri. Poiché il geoide è definito come una superficie equipotenziale del campo gravitazionale, e il campo gravitazionale varia periodicamente a causa della redistribuzione di massa interna causata dalla deformazione, anche il geoide si deforma. La variazione dell'ondulazione geoidale può essere calcolata dalla relazione $\delta N = (1 + k) V_{tide} / \gamma$, dove $V_{tide}$ è il potenziale di marea, $k$ è il numero di Love del potenziale, e $\gamma$ è la gravità normale.

Per la marea lunare semidiurna $M_2$, che ha ampiezza potenziale di circa 0,35 $m^2/s^2$, e usando $k \approx 0,3$ e $\gamma \approx 9,81$ $m/s^2$, si ottiene $\delta N \approx 1,3 \times 0,35 / 9,81 \approx 0,046$ m ≈ 4,6 cm. Questo è un effetto significativo che varia con periodo di circa dodici ore e venticinque minuti. Per determinazioni geoidali che utilizzano dati raccolti in momenti diversi, questa variazione periodica deve essere modellata e rimossa, altrimenti introduce errori sistematici o aumenta il rumore apparente nei dati.

Le maree oceaniche producono uno spostamento periodico di enormi masse d'acqua, con variazioni del livello del mare che raggiungono metri in alcune regioni costiere. Questa redistribuzione di massa oceanica genera variazioni del campo gravitazionale e quindi del geoide attraverso due meccanismi: l'attrazione gravitazionale diretta della massa d'acqua spostata, e la deformazione della Terra solida causata dal carico oceanico variabile (ocean tide loading).

L'effetto di carico oceanico è particolarmente importante in regioni costiere e su isole oceaniche. Quando la marea alta sposta una grande massa d'acqua verso una regione, il peso addizionale deprime elasticamente la crosta sottostante, producendo una subsidenza che può raggiungere alcuni centimetri. Questa subsidenza è accompagnata da un rigonfiamento nelle regioni circostanti (la crosta si comporta come una membrana elastica che si deprime sotto il carico e si rigonfia ai lati). La deformazione di carico modifica le altezze ellissoidiche misurate con GPS e introduce correzioni nelle determinazioni di altezze ortometriche da GPS/geoid.

Il calcolo accurato dell'effetto di carico richiede la convoluzione del carico oceanico (fornito da un modello di marea oceanica) con le funzioni di Green della deformazione elastica terrestre (che dipendono dai numeri di Love di carico). Matematicamente, lo spostamento

verticale in un punto P dovuto al carico oceanico è δz(P) = ∫∫_{oceano} h_load(ψ) Δp(Q) R^2 dΩ, dove l'integrale si estende su tutti gli oceani, Δp(Q) è la variazione di pressione (uguale a ρ_water g Δη, con Δη la variazione di altezza oceanica) nel punto Q, h_load(ψ) è la funzione di Green di carico che dipende dalla distanza angolare ψ tra P e Q, e dΩ è l'elemento di angolo solido.

Le funzioni di Green di carico possono essere calcolate da modelli di Terra stratificata utilizzando trasformate di Legendre, analogamente ai numeri di Love per le deformazioni dirette. I codici standard per questi calcoli includono il pacchetto SPOTL (Some Programs for Ocean Tide Loading) e il servizio online fornito da Onsala Space Observatory in Svezia, che calcola correzioni di carico oceanico per stazioni GPS specificate dall'utente utilizzando modelli di marea oceanica aggiornati.

L'ampiezza delle correzioni di carico oceanico varia drasticamente con la posizione. In oceano aperto, lontano dalle masse continentali, l'effetto è piccolo (millimetri). Vicino alle coste, specialmente in regioni con ampiezze di marea grandi, l'effetto può raggiungere uno-due centimetri. Su isole oceaniche isolate, l'effetto è intermedio. La struttura spaziale delle correzioni è complessa, riflettendo la geometria dei bacini oceanici e le distanze dalle regioni con variazioni di marea significative.

Per le determinazioni geoidali moderne che utilizzano dati gravimetrici o GPS/livellazione raccolti in epoche diverse, è essenziale applicare correzioni di marea terrestre e di carico oceanico per ridurre tutti i dati a un'epoca di riferimento comune (tipicamente una media di lungo periodo che elimina tutte le variazioni periodiche). I software geodetici standard includono routine per calcolare queste correzioni basandosi su modelli di marea consolidati e parametri standard dei numeri di Love.

## Maree a Lungo Periodo e Pole Tide

Oltre alle maree periodiche ben note con periodi di ore a mesi, esistono variazioni mareali su scale temporali molto più lunghe (anni, decenni, millenni) che hanno effetti sottili ma scientificamente interessanti. Le maree a lungo periodo principali includono la marea nodal di 18,6 anni, la marea di precessione di circa ventiseimila anni, e effetti legati alle variazioni dell'eccentricità orbitale terrestre e dell'obliquità dell'asse di rotazione su scale temporali di decine di migliaia di anni.

La marea nodal di 18,6 anni è causata dalla precessione del piano orbitale lunare, che compie un ciclo completo in questo periodo. Durante questo ciclo, la declinazione massima della Luna varia tra circa ±18,3 gradi e ±28,6 gradi. Questa variazione modula l'ampiezza di alcune componenti di marea, in particolare la componente diurna K_1. L'effetto sulla Terra solida e sugli oceani è piccolo ma misurabile, con ampiezze di deformazione dell'ordine di millimetri e variazioni del livello medio del mare di pochi centimetri in alcune regioni.

Le osservazioni geodetiche di lungo periodo, come le serie temporali di stazioni GPS permanenti che operano da oltre due decenni, cominciano ad essere abbastanza lunghe da rilevare questo segnale di 18,6 anni. La separazione di questo segnale da altri effetti geofisici a lungo termine (trend tettonici, recupero post-glaciale, variazioni climatiche) richiede modellazione accurata e tecniche di analisi di serie temporali sofisticate.

Il pole tide è un fenomeno particolare causato dalla variazione della forza centrifuga dovuta allo spostamento dell'asse di rotazione terrestre rispetto alla crosta. La Terra non ruota attorno a un asse fisso nello spazio né rispetto alla crosta, ma l'asse istantaneo di rotazione si muove sia nello spazio inerziale (precessione e nutazione, con periodi da giorni a ventiseimila anni) sia rispetto alla crosta (polar motion, con componenti principale di circa quattordici mesi, periodo di Chandler, e componenti annuali).

Il movimento polare ha ampiezza tipica di alcuni metri alla superficie terrestre, equivalente a uno spostamento del polo geografico di circa dieci-quindici metri rispetto alla crosta. Questo spostamento modifica la distribuzione della forza centrifuga (che dipende dalla distanza dall'asse di rotazione), producendo un potenziale perturbante che causa deformazioni della Terra solida e variazioni del livello del mare (il cosiddetto pole tide oceanico).

L'ampiezza del potenziale pole tide è proporzionale al quadrato dello spostamento polare e inversamente proporzionale al raggio terrestre: V_pole ≈ (Ω^2 R / 2) (m_x x + m_y y), dove m_x e m_y sono le coordinate dello spostamento polare (tipicamente misurate in secondi d'arco) e x, y sono coordinate proporzionali alle funzioni sferiche di grado due e ordine uno. L'ampiezza risultante è dell'ordine di alcuni millimetri di deformazione verticale.

Il pole tide oceanico produce variazioni del livello del mare con pattern geografico caratteristico: massimi vicino ai poli e minimi all'equatore, con struttura a quattro lobi in longitudine. L'ampiezza è di circa un centimetro alle alte latitudini. Queste variazioni sono importanti da considerare nell'interpretazione di osservazioni altimetriche di lungo periodo e nello studio delle variazioni del livello medio del mare.

## Applicazioni Avanzate: Geodesia Mareale e Studio della Struttura Interna

Le osservazioni di alta precisione delle maree terrestri e oceaniche forniscono vincoli preziosi sulla struttura interna della Terra che sono complementari alle informazioni da altre tecniche geofisiche come la sismologia. La dipendenza dei numeri di Love dalla struttura interna significa che misurazioni accurate della risposta mareale possono essere invertite per dedurre proprietà del mantello e del nucleo.

I gravimetri superconduttori rappresentano lo strumento più sensibile per misurare le variazioni di gravità mareali. Questi strumenti utilizzano una sfera di niobio levitante magneticamente in un campo prodotto da bobine superconduttrici raffreddate a temperature di elio liquido (circa quattro kelvin). La posizione della sfera è estremamente sensibile alle variazioni di gravità, permettendo misurazioni con precisione di poche parti su 10^{-11} dell'accelerazione di gravità totale, equivalente a circa 0,1 nanogal o 10^{-10} m/s^2.

Le serie temporali di gravimetri superconduttori che operano continuamente per anni mostrano le componenti di marea con chiarezza straordinaria, permettendo di determinare i fattori di ampiezza e gli sfasamenti con precisioni di frazioni di %. Confrontando questi parametri osservati con le predizioni teoriche per diversi modelli di Terra, si possono vincolare proprietà come il profilo di densità, la rigidità del mantello, e la presenza e proprietà del nucleo liquido esterno.

Un risultato particolarmente interessante riguarda la risonanza del nucleo. Il nucleo liquido esterno della Terra può supportare oscillazioni proprie (modi normali del fluido) che, per

certe frequenze, risuonano con le frequenze delle maree. Quando si verifica risonanza, l'ampiezza della risposta mareale è amplificata e lo sfasamento mostra anomalie caratteristiche. Sebbene la risonanza perfetta non si verifichi per nessuna delle componenti di marea principali (le frequenze dei modi del nucleo non coincidono esattamente con le frequenze di marea), ci sono risonanze vicine che producono piccole ma misurabili modifiche nei parametri mareali.

L'analisi di queste anomalie di risonanza ha fornito stime della viscosità del nucleo esterno (che risulta essere estremamente bassa, quasi come un fluido perfetto), della presenza di una discontinuità di densità all'interfaccia nucleo-mantello, e delle proprietà elastiche della zona D'' (la regione del mantello inferiore immediatamente sopra il nucleo, che mostra anomalie sismologiche e probabilmente ha composizione o fase mineralogica diverse dal mantello sovrastante).

Gli inclinometri e gli estensimetri, che misurano rispettivamente le variazioni di inclinazione della superficie e le deformazioni lineari, forniscono informazioni complementari. Le inclinazioni mareali sono sensibili ai numeri di Love h e l, mentre le deformazioni estensionali sono sensibili a combinazioni diverse di parametri elastici. La combinazione di gravimetria, inclinometria, ed estensimetria in siti co-localizzati permette di sovradeterminare il sistema e separare gli effetti dei diversi meccanismi di deformazione.

Le osservazioni mareali hanno anche applicazioni nella sismologia e nello studio dei terremoti. Le deformazioni mareali, sebbene piccole, modulano lo stato di stress nella crosta e possono influenzare il triggering (innesco) di terremoti, particolarmente in regioni vicine alla soglia di rottura. Analisi statistiche hanno trovato correlazioni deboli ma significative tra le fasi di marea e l'occorrenza di terremoti in alcune regioni tettonicamente attive, suggerendo che le maree possono agire come fattore di trigger per eventi che erano già prossimi alla rottura spontanea.

Inoltre, i grandi terremoti producono variazioni permanenti o co-sismiche del campo gravitazionale a causa delle redistribuzioni di massa associate allo spostamento delle faglie. Queste variazioni sono state osservate da GRACE per i maggiori terremoti (magnitudo superiore a 8,5), come il terremoto di Sumatra del 2005 e il terremoto del Giappone del 2011i, fornendo vincoli indipendenti sulla geometria della rottura e sulle dislocazioni co-sismiche.

# Geoide e Ondulazioni Geoidali - Parte XVI

## Metodi di Downward e Upward Continuation del Potenziale Gravitazionale e Teoria degli Errori

### Fondamenti Matematici della Continuation del Potenziale Armonico

La continuation del potenziale gravitazionale, ovvero la determinazione del potenziale in punti dello spazio dove non è stato misurato direttamente a partire da misurazioni in altri punti, rappresenta uno dei problemi matematici centrali della geodesia fisica e della geofisica esplorativa. Questo problema si manifesta naturalmente in due forme: l'upward continuation (continuazione verso l'alto), dove si vuole determinare il potenziale o le sue derivate a quote superiori rispetto ai punti di misura, e il downward continuation (continuazione verso il basso), dove si vuole determinare il potenziale a quote inferiori.

Il fondamento teorico della continuation risiede nella proprietà armonica del potenziale gravitazionale. Nello spazio esterno alla distribuzione di massa (ovvero al di fuori della superficie terrestre nel caso del campo gravitazionale terrestre), il potenziale V soddisfa l'equazione di Laplace $\nabla^2 V = 0$. Questa equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico ha proprietà matematiche ben studiate che garantiscono l'unicità della soluzione date opportune condizioni al contorno.

Una conseguenza fondamentale della proprietà armonica è il teorema del valor medio (mean value theorem): il valore del potenziale in un punto P è uguale alla media del potenziale su qualsiasi sfera centrata in P che sia contenuta interamente nella regione armonica. Matematicamente, $V(P) = (1/4\pi) \iint_{sfera} V(Q)\, d\Omega$, dove l'integrale si estende su una sfera di raggio arbitrario r centrata in P, e $d\Omega$ è l'elemento di angolo solido. Questa proprietà implica che il potenziale in qualsiasi punto è completamente determinato dai suoi valori su qualsiasi superficie chiusa che racchiude quel punto.

Per il problema dell'upward continuation, supponiamo di conoscere il potenziale V (o le sue derivate, come l'anomalia di gravità $\Delta g = -\partial V/\partial r$) su una superficie $S_0$ (tipicamente la superficie terrestre o una superficie vicina), e vogliamo determinare V su una superficie $S_1$ che si trova al di sopra di $S_0$. Poiché la regione tra $S_0$ e $S_1$ è esterna alle masse terrestri (assumendo che non ci siano masse significative nell'atmosfera, un'assunzione eccellente per scopi geodetici), il potenziale in questa regione soddisfa l'equazione di Laplace e il problema è ben posto.

L'upward continuation può essere effettuato mediante diverse tecniche matematiche. L'approccio più diretto utilizza la rappresentazione integrale del potenziale armonico. Se conosciamo il potenziale $V_0$ e la sua derivata normale $\partial V_0/\partial n$ su una superficie chiusa $S_0$, il potenziale in qualsiasi punto P al di sopra di questa superficie può essere espresso mediante la formula integrale di Green: $V(P) = (1/4\pi) \iint_{S_0} [V_0(Q)\, (\partial/\partial n_Q)(1/|P-Q|) - (\partial V_0/\partial n_Q)(1/|P-Q|)]\, dS$, dove l'integrale si estende su tutta la superficie $S_0$, $n_Q$ è la normale alla superficie in Q diretta verso l'esterno, e $|P-Q|$ è la distanza tra i punti P e Q.

Questa formula, sebbene formalmente esatta, presenta sfide pratiche. Richiede la conoscenza sia del potenziale sia della sua derivata normale su tutta la superficie, mentre tipicamente si dispone solo di una di queste quantità. Inoltre, la valutazione numerica dell'integrale richiede discretizzazione della superficie e può essere computazionalmente intensiva.

Un approccio alternativo e spesso più pratico utilizza lo sviluppo in armoniche sferiche. Se il potenziale sulla superficie di riferimento (assunta sferica di raggio $R_0$) è sviluppato in armoniche sferiche come $V_0(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} V_{nm}\, Y_{nm}(\theta, \lambda)$, dove $Y_{nm}$ sono le armoniche sferiche normalizzate, allora il potenziale a quota superiore

(raggio R_1 > R_0) è semplicemente V_1(θ, λ) = ∑*{n=0}^{∞}* ∑{m=-n}^{n} V_{nm} (R_0/R_1)^{n+1} Y_{nm}(θ, λ). Il fattore (R_0/R_1)^{n+1} rappresenta l'attenuazione di ciascuna armonica sferica con l'altezza.

Questo risultato mostra una proprietà fondamentale dell'upward continuation: le componenti di alta frequenza (grado armonico n grande) decrescono più rapidamente con l'altezza rispetto alle componenti di bassa frequenza. Specificamente, un'armonica di grado n decresce di un fattore (R_0/R_1)^{n+1} ≈ [1 - (n+1)h/R_0] per piccole altezze h = R_1 - R_0. Per esempio, a un'altezza di cento chilometri (circa l'1,6% del raggio terrestre), un'armonica di grado dieci decresce di circa il sedici %, mentre un'armonica di grado cento decresce di oltre il novantanove %.

Questa proprietà di filtraggio passa-basso dell'upward continuation ha conseguenze pratiche importanti. Significa che le osservazioni satellitari del campo gravitazionale a quote di duecento-quattrocento chilometri sono intrinsecamente insensibili alle componenti di alta frequenza (brevi lunghezze d'onda) del campo gravitazionale, che si attenuano rapidamente con l'altezza. Al contrario, le componenti a lunga lunghezza d'onda (gradi armonici bassi) sono ben osservabili dalle quote orbitali. Questo spiega perché le missioni satellitari come GRACE sono eccellenti per determinare il campo gravitazionale a grandi lunghezze d'onda ma richiedono integrazione con dati terrestri per risolvere le strutture di scala più fine.

## Downward Continuation: Un Problema Inverso Mal-Posto

Il downward continuation, la determinazione del potenziale a quote inferiori rispetto ai punti di osservazione, presenta sfide matematiche e numeriche molto maggiori dell'upward continuation. Mentre l'upward continuation è un problema ben posto (la soluzione esiste, è unica, e dipende continuamente dai dati), il downward continuation è un problema inverso mal-posto nel senso di Hadamard: piccole variazioni nei dati possono causare variazioni arbitrariamente grandi nella soluzione, violando la condizione di stabilità.

La ragione fisica di questa instabilità è evidente dalla relazione spettrale discussa sopra. Se continuiamo verso il basso da quota R_1 a quota R_0 < R_1, il fattore di trasformazione spettrale diventa (R_1/R_0)^{n+1} > 1, che cresce esponenzialmente con il grado n. Questo significa che le componenti di alta frequenza, che erano attenuate nell'upward continuation, vengono amplificate esponenzialmente nel downward continuation. Qualsiasi rumore presente nei dati a frequenze alte viene amplificato catastroficamente, causando l'instabilità della soluzione.

Matematicamente, il problema di downward continuation può essere formulato come un'equazione integrale di Fredholm del primo tipo, notoriamente mal-posta. Se V_1(θ, λ) sono i dati sulla superficie superiore e V_0(θ, λ) è la soluzione incognita sulla superficie inferiore, la relazione è V_1 = K[V_0], dove K è un operatore integrale che rappresenta l'upward continuation. Il downward continuation richiede l'inversione di questo operatore: V_0 = K^{-1}[V_1]. Tuttavia, l'operatore inverso K^{-1} non è limitato (bounded), il che è la manifestazione matematica dell'instabilità.

Per risolvere praticamente il problema di downward continuation, è necessario applicare tecniche di regolarizzazione che stabilizzano la soluzione al costo di introdurre una certa distorsione o bias. La regolarizzazione può essere vista come un compromesso tra fedeltà ai

dati e regolarità della soluzione. Soluzioni troppo fedeli ai dati (incluso il loro rumore) sono irregolari e fisicamente implausibili; soluzioni troppo regolari possono perdere dettagli genuini presenti nei dati.

La regolarizzazione di Tikhonov applicata al downward continuation consiste nel minimizzare una funzione obiettivo della forma $\Phi = ||K[V_0] - V_1||^2 + \alpha ||L[V_0]||^2$, dove il primo termine misura la discrepanza tra i dati osservati $V_1$ e i dati predetti dall'upward continuation della soluzione proposta $V_0$, il secondo termine è una penalità sulla irregolarità della soluzione (tipicamente la norma delle derivate di $V_0$), $\alpha$ è il parametro di regolarizzazione che controlla il bilancio tra fedeltà e regolarità, e L è un operatore differenziale (tipicamente il Laplaciano o un gradiente).

Nel dominio spettrale, la regolarizzazione di Tikhonov equivale a modificare i fattori di amplificazione $(R_1/R_0)^{n+1}$ introducendo un filtro che attenua le alte frequenze. I coefficienti spettrali della soluzione regolarizzata sono $V_{0,nm}^{reg} = [(R_0/R_1)^{n+1} / ((R_0/R_1)^{2(n+1)} + \alpha \lambda_n)] V_{1,nm}$, dove $\lambda_n$ sono gli autovalori dell'operatore di penalità (tipicamente $\lambda_n \propto n^2$ o $n^4$). Per $\alpha \to 0$, si recupera la soluzione non regolarizzata (instabile); per $\alpha \to \infty$, la soluzione tende a zero (massima regolarità ma nessuna informazione dai dati).

La scelta del parametro di regolarizzazione $\alpha$ è cruciale e può essere effettuata mediante diversi criteri. Il principio della discrepanza di Morozov prescrive di scegliere $\alpha$ tale che la discrepanza $||K[V_0^{reg}] - V_1||$ sia uguale a una stima dell'errore nei dati. Il metodo della curva L traccia la norma della soluzione contro la norma del residuo per diversi valori di $\alpha$ e sceglie il valore al gomito della curva (dove ulteriore diminuzione del residuo richiede aumento drammatico della norma della soluzione). La validazione incrociata generalizzata (GCV) utilizza tecniche statistiche per selezionare il valore di $\alpha$ che minimizza l'errore di predizione.

## Metodi di Continuation in Geometria Planare e Trasformate di Fourier

Per applicazioni su regioni limitate della superficie terrestre dove la curvatura può essere trascurata, il problema di continuation può essere trattato in geometria planare utilizzando trasformate di Fourier bidimensionali. Questo approccio è computazionalmente molto efficiente e fornisce insight fisico chiaro sul comportamento della continuation.

Supponiamo di avere osservazioni del potenziale o dell'anomalia di gravità su un piano orizzontale $z = z_0$. In geometria planare, il potenziale armonico può essere rappresentato come $V(x, y, z) = \iint \hat{V}(k_x, k_y) \exp[i(k_x x + k_y y) - \kappa|z - z_0|] dk_x dk_y$, dove $\hat{V}(k_x, k_y)$ è la trasformata di Fourier bidimensionale del potenziale sul piano $z = z_0$, $k_x$ e $k_y$ sono i numeri d'onda nelle direzioni x e y, e $\kappa = \sqrt{(k_x^2 + k_y^2)}$ è il numero d'onda totale.

Il fattore $\exp[-\kappa|z - z_0|]$ rappresenta la propagazione verticale. Per $z > z_0$ (upward continuation), questo fattore decresce esponenzialmente con la distanza verticale e con il numero d'onda, implementando il filtraggio passa-basso discusso sopra. Per $z < z_0$ (downward continuation), il fattore diventa $\exp[\kappa(z - z_0)]$ che cresce esponenzialmente, causando l'instabilità.

L'implementazione pratica dell'upward continuation in geometria planare è quindi molto semplice: si calcola la trasformata di Fourier 2D dei dati (usando FFT per efficienza), si moltiplica per exp[-κ Δz] dove Δz = z_1 - z_0 è l'altezza di continuation, e si esegue la trasformata inversa. Questo procedimento è estremamente efficiente, con complessità computazionale O(N log N) per N punti dati.

Il downward continuation richiede regolarizzazione anche in questo framework. Un filtro di regolarizzazione comunemente utilizzato è il filtro di Wiener, che moltiplica per exp[κ Δz] / (1 + α exp[2κ Δz]), dove α è il parametro di regolarizzazione. Questo filtro amplifica le componenti di bassa frequenza (piccolo κ) quasi senza attenuazione, ma attenua fortemente le alte frequenze dove l'amplificazione esponenziale sarebbe numericamente instabile.

Per la continuation di derivate del potenziale (come l'anomalia di gravità), le relazioni spettrali sono analoghe ma includono fattori addizionali corrispondenti alle derivazioni. Per esempio, l'anomalia di gravità $\Delta g \approx -\partial V/\partial z$ corrisponde nel dominio di Fourier a $\Delta \hat{g} = \kappa \hat{V}$. La continuation di Δg da z_0 a z_1 > z_0 è quindi $\Delta \hat{g}(z_1) = \Delta \hat{g}(z_0) \exp[-\kappa(z_1 - z_0)]$, equivalentemente $\Delta g(x, y, z_1) = \iint \Delta \hat{g}(k_x, k_y, z_0) \exp[i(k_x x + k_y y) - \kappa(z_1 - z_0)] \, dk_x \, dk_y$.

## Applicazioni Pratiche: Riduzione al Geoide e Anomalie Aria Libera

Una delle applicazioni più importanti della continuation in geodesia è la riduzione delle anomalie di gravità misurate sulla superficie topografica al livello del geoide (o a un'altra superficie di riferimento regolare). Le misurazioni gravimetriche terrestri sono effettuate sulla superficie fisica della Terra, che ha elevazioni variabili da livello del mare a migliaia di metri. Per applicare formule come quella di Stokes, che sono derivate assumendo che i dati siano su una superficie sferica regolare, è necessario continuare i dati dalla superficie topografica irregolare a una superficie regolare.

La correzione in aria libera (free-air correction), discussa precedentemente, è un'approssimazione di primo ordine di questa continuation. Essa assume che il gradiente verticale della gravità sia costante e pari a $-\partial g/\partial h \approx -2g/R \approx -0{,}3086$ mGal/m. L'anomalia in aria libera è quindi $\Delta g_{FA} \approx g_{obs} - \gamma + (2g/R) h$, dove g_obs è la gravità osservata all'elevazione h, e γ è la gravità normale sulla superficie di riferimento.

Questa correzione lineare è accurata per altezze moderate (fino a qualche centinaio di metri) ma diventa inadeguata per elevazioni maggiori o per applicazioni che richiedono precisione migliore di pochi mGal. Una correzione più accurata richiede la consideration di termini di ordine superiore nel gradiente di gravità e, idealmente, la continuation numerica completa utilizzando i metodi discussi sopra.

Il problema è complicato dal fatto che la superficie topografica non è una superficie equipotenziale regolare, e che esistono masse (le montagne e le valli topografiche) tra la superficie di osservazione e la superficie di riferimento. La teoria rigorosa del downward continuation assume che la regione tra le due superfici sia esterna alle masse, un'assunzione violata dalla presenza di topografia.

La soluzione standard in geodesia è il metodo di rimozione-ripristino (remove-restore o remove-compute-restore). Si rimuove prima l'effetto gravitazionale della topografia dai dati

osservati, ottenendo anomalie residue che possono essere continuate come se non ci fossero masse intermedie. Dopo la continuation, si ripristina l'effetto topografico alla quota di riferimento. Matematicamente: Δg_ridotto = Δg_obs - δg_topo; continuation: Δg_ridotto(z_ref) = C[Δg_ridotto(z_obs)]; ripristino: Δg_finale = Δg_ridotto(z_ref) + δg_topo(z_ref), dove δg_topo è l'effetto gravitazionale della topografia calcolato mediante modelli digitali di elevazione e assunzioni sulla densità.

Questo metodo funziona bene se l'effetto topografico è calcolato accuratamente e se le anomalie residue sono sufficientemente lisce da permettere continuation stabile. In regioni con topografia estrema e variazioni di densità sconosciute, l'incertezza nella modellazione topografica diventa il fattore limitante nell'accuratezza della continuation.

## Teoria degli Errori e Propagazione delle Incertezze nei Calcoli Geoidali

La determinazione del geoide da dati gravimetrici, come qualsiasi processo di misurazione e calcolo scientifico, è soggetta a errori e incertezze che devono essere quantificati rigorosamente per valutare l'affidabilità dei risultati. La teoria degli errori geodetici comprende tre componenti principali: gli errori nelle misurazioni primarie (gravità, posizioni, altezze), gli errori introdotti dai processi di riduzione e correzione dei dati, e gli errori di troncamento e discretizzazione nei calcoli integrali e spettrali.

Gli errori nelle misurazioni gravimetriche hanno molteplici fonti. I gravimetri moderni (relativi a molla o assoluti a caduta libera) hanno precisioni strumentali dell'ordine di microGal (10^{-8} m/s^2) in condizioni controllate, ma nella pratica sul campo gli errori sono tipicamente maggiori a causa di effetti ambientali: variazioni di temperatura che affettano le costanti elastiche delle molle, vibrazioni del terreno da traffico o attività sismica, gradiente verticale di gravità che richiede centramento preciso del sensore, maree terrestri se non correttamente modellate, e derive strumentali che variano nel tempo.

Gli errori sistematici sono particolarmente insidiosi perché non si riducono con la media di misurazioni ripetute. Un bias di calibrazione nel gravimetro produrrà un errore costante in tutte le misurazioni effettuate con quello strumento. Un errore nell'altezza del punto di misura (che deve essere conosciuta con precisione centimetrica per applicare correttamente la correzione in aria libera) si propaga direttamente come errore nell'anomalia di gravità ridotta. Connessioni errate a capisaldi di riferimento della rete gravimetrica introducono offset sistematici.

La propagazione degli errori attraverso i processi di riduzione gravimetrica può essere analizzata mediante la legge di propagazione degli errori (error propagation law). Se una quantità calcolata y è funzione di misurazioni x_i affette da errori σ_{x_i}, l'errore in y è approssimativamente σ_y² ≈ ∑*i (∂y/∂x_i)² σ*{x_i}² + 2 ∑_{i<j} (∂y/∂x_i)(∂y/∂x_j) cov(x_i, x_j), dove i termini di covarianza tengono conto di correlazioni tra gli errori nelle diverse misurazioni.

Per esempio, l'anomalia in aria libera Δg_FA = g_obs - γ + (∂g/∂h) h dipende dalla gravità osservata g_obs, dalla gravità normale γ (che dipende dalla latitudine), e dall'altezza h. Se gli errori in queste quantità sono σ_g, σ_γ, e σ_h, e assumendo che siano non correlati, l'errore in Δg_FA è σ_{Δg_FA}² ≈ σ_g² + σ_γ² + (∂g/∂h)² σ_h². Con valori tipici σ_g ≈ 0,05 mGal (gravimetria di precisione), σ_γ ≈ 0,01 mGal (gravità normale è ben modellata), σ_h ≈

0,1 m (accuratezza GPS differenziale), e $\partial g/\partial h \approx 0{,}3086$ mGal/m, si ottiene $\sigma_{\Delta g_FA} \approx \sqrt{(0{,}05^2 + 0{,}01^2 + 0{,}3086^2 \times 0{,}1^2)} \approx \sqrt{(0{,}0025 + 0{,}0001 + 0{,}00095)} \approx 0{,}06$ mGal.

Questo calcolo mostra che per altezze moderate, l'errore dominante è quello nella misurazione della gravità stessa. Per altezze molto grandi (oltre mille metri), l'incertezza nell'altezza diventa comparabile o dominante.

La propagazione degli errori attraverso la formula di Stokes è più complessa a causa della natura integrale della trasformazione. Se le anomalie di gravità hanno errori $\sigma_{\Delta g}(\theta, \lambda)$ che variano spazialmente, l'errore nell'ondulazione geoidale in un punto P è $\sigma_N(P)^2 = (R/4\pi\gamma)^2 \iint \sigma_{\Delta g}^2(Q)\, S^2(\psi_{PQ})\, d\sigma$, dove l'integrale si estende sulla sfera e $\psi_{PQ}$ è la distanza angolare tra P e Q. Questa formula assume che gli errori in punti diversi siano non correlati, un'assunzione ragionevole se le misurazioni sono effettuate con strumenti indipendenti in campagne diverse.

Se gli errori sono approssimativamente uniformi spazialmente con $\sigma_{\Delta g} \approx$ costante, l'integrale può essere valutato analiticamente. Il risultato è $\sigma_N^2 \approx (R/4\pi\gamma)^2\, \sigma_{\Delta g}^2 \iint S^2(\psi)\, d\sigma$. L'integrale $\iint S^2(\psi)\, d\sigma$ può essere calcolato utilizzando le proprietà dei polinomi di Legendre e risulta essere finito nonostante la singolarità $S(\psi) \sim 2/\psi$ per piccoli $\psi$. Il valore numerico è approssimativamente $\iint S^2(\psi)\, d\sigma \approx 52{,}7 \times 4\pi$ steradianti.

Sostituendo, $\sigma_N \approx (R/\gamma)\, \sigma_{\Delta g} \sqrt{(52{,}7/4\pi)} \approx (6371000 \text{ m} / 9{,}81 \text{ m/s}^2) \times \sigma_{\Delta g} \times 2{,}05 \approx 1{,}33 \times 10^6 \text{ s}^2 \times \sigma_{\Delta g}$. Con $\sigma_{\Delta g} = 1$ mGal $= 10^{-5}$ m/s², si ottiene $\sigma_N \approx 13{,}3$ m. Questo sembra suggerire che errori di 1 mGal nelle anomalie di gravità si propaghino in errori di tredici metri nell'ondulazione geoidale, che sarebbe catastrofico.

Tuttavia, questo calcolo assume che gli errori siano completamente non correlati su tutta la Terra, il che è irrealistico. In pratica, gli errori in regioni distanti sono completamente scorrelati, ma gli errori in regioni vicine hanno correlazioni dovute a sistematiche strumentali comuni, procedure di riduzione simili, o interpolazioni da dataset sovrapposti. La struttura di correlazione spaziale degli errori riduce drasticamente l'errore propagato.

Se gli errori hanno una lunghezza di correlazione L (ovvero errori a distanze maggiori di L sono scorrelati), l'integrale effettivo nella formula di propagazione è ridotto approssimativamente di un fattore $\sqrt{(L/R_{earth})}$. Per $L \approx 100$ km e $R_{earth} \approx 6371$ km, questo fattore è $\sqrt{(100/6371)} \approx 0{,}125$, riducendo $\sigma_N$ a circa 1,7 metri, ancora significativo ma molto più gestibile.

Nella pratica, le stime di accuratezza dei modelli geoidali sono derivate empiricamente mediante confronto con osservazioni indipendenti di ondulazione geoidale da punti GPS/livellazione, piuttosto che da propagazione teorica degli errori. Queste stime empiriche indicano accuratezze tipiche di cinque-quindici centimetri RMS per modelli geoidali regionali di alta qualità in regioni ben osservate, e deterioramento a decimetri o metri in regioni con copertura gravimetrica scarsa.

## Smoothing e Filtraggio dei Dati Gravimetrici

Il filtraggio e lo smoothing dei dati gravimetrici sono tecniche essenziali per ridurre il rumore casuale, rimuovere outlier, e preparare i dati per calcoli geoidali o altre analisi geofisiche. Il

filtraggio può essere applicato sia nel dominio spaziale (mediante convoluzione con kernel di smoothing) sia nel dominio spettrale (mediante attenuazione selettiva di range di frequenze).

Il filtraggio passa-basso (low-pass filtering) attenua le componenti ad alta frequenza (corte lunghezze d'onda) del segnale, preservando le variazioni a larga scala. Questo è utile per rimuovere rumore casuale ad alta frequenza e per estrarre i trend regionali nei dati gravimetrici. Nel dominio spettrale, un filtro passa-basso moltiplica i coefficienti di Fourier per una funzione di trasferimento $W(\kappa)$ che è circa uno per $\kappa < \kappa_c$ (dove $\kappa_c$ è la frequenza di taglio) e decresce verso zero per $\kappa > \kappa_c$.

Filtri passa-basso comuni includono: il filtro rettangolare (o brick-wall filter) con $W(\kappa) = 1$ per $\kappa < \kappa_c$ e $W(\kappa) = 0$ per $\kappa > \kappa_c$, che taglia bruscamente tutte le frequenze sopra $\kappa_c$ ma introduce oscillazioni spurie (fenomeno di Gibbs) dovute alla discontinuità; il filtro di Butterworth con $W(\kappa) = 1 / [1 + (\kappa/\kappa_c)^{2n}]^{1/2}$, dove n è l'ordine del filtro (valori tipici n = 2-8), che fornisce una transizione più graduale; e il filtro gaussiano con $W(\kappa) = \exp[-(\kappa/\kappa_c)^2]$, che ha la proprietà di essere gaussiano sia nel dominio spaziale sia nel dominio di Fourier.

Nel dominio spaziale, il filtraggio passa-basso equivale a convoluzione con un kernel di smoothing. Per il filtro gaussiano, il kernel spaziale è $g(r) = (1/2\pi\sigma^2) \exp[-r^2/(2\sigma^2)]$, dove $\sigma$ è la larghezza del kernel (legata a $\kappa_c$ da $\sigma \approx 1/\kappa_c$), e r è la distanza dal punto centrale. La gravità filtrata in un punto è $\Delta g_{smooth}(P) = \iint \Delta g(Q)\, g(|P-Q|)\, dA$, dove l'integrale si estende su una regione attorno a P.

Il filtraggio passa-banda (band-pass filtering) preserva solo un range di frequenze $\kappa_1 < \kappa < \kappa_2$, attenuando sia le frequenze molto basse sia quelle molto alte. Questo è utile per isolare fenomeni che si manifestano in un range specifico di lunghezze d'onda, come anomalie crostali a scale di decine di chilometri o anomalie mantellari a scale di centinaia di chilometri.

Il filtraggio adattivo utilizza parametri di smoothing che variano spazialmente a seconda delle caratteristiche locali dei dati. In regioni con densità di dati alta e basso rumore, si può utilizzare meno smoothing per preservare dettagli. In regioni con dati sparsi o rumorosi, si utilizza più smoothing per stabilizzare la soluzione. L'implementazione di filtri adattivi richiede algoritmi che stimano localmente il rapporto segnale-rumore o che utilizzano criteri di validazione incrociata per selezionare ottimalmente i parametri di smoothing.

La rimozione di outlier (dati aberranti) è un preprocessing essenziale prima di qualsiasi filtraggio o calcolo. Gli outlier possono essere causati da errori di trascrizione, malfunzionamenti strumentali, o condizioni di misura anomale. Metodi statistici standard per identificazione di outlier includono: il criterio dei tre sigma (eliminare punti che deviano dalla media di più di tre deviazioni standard), metodi robusti basati sulla mediana assoluta della deviazione (MAD), e algoritmi di clustering che identificano punti isolati che non si conformano alla struttura generale dei dati.

Dopo la rimozione di outlier e il filtraggio, i dati gravimetrici devono spesso essere interpolati su una griglia regolare per permettere calcoli integrali o trasformazioni spettrali efficienti. Metodi di interpolazione comuni includono: interpolazione bilineare o bicubica, kriging (che utilizza la struttura di covarianza spaziale dei dati per interpolazione ottimale), spline bidimensionali (che minimizzano la curvatura della superficie interpolante), e collocazione

per minimi quadrati (discussa precedentemente come metodo unificato per predizione geodetica).

La scelta del metodo di interpolazione dipende dalla densità e distribuzione dei dati, dalle caratteristiche statistiche del campo (liscio vs rugoso, isotropo vs anisotropo), e dai requisiti computazionali. Per dataset molto grandi (milioni di punti) e griglie ad alta risoluzione, l'efficienza computazionale diventa un vincolo significativo, favorendo metodi locali (come interpolazione bicubica su sottoinsiemi dei dati) rispetto a metodi globali (come kriging o collocazione su tutti i dati).

## Quantificazione Rigorosa delle Incertezze: Approcci Bayesiani e Monte Carlo

Gli approcci bayesiani alla quantificazione delle incertezze nei modelli geoidali forniscono un framework probabilistico rigoroso che va oltre le stime di errore puntuali derivate dalla propagazione lineare degli errori. In un framework bayesiano, sia i dati sia i parametri del modello (come i coefficienti armonici del campo gravitazionale o la distribuzione di densità) sono trattati come variabili aleatorie con distribuzioni di probabilità.

Il teorema di Bayes stabilisce che la distribuzione a posteriori dei parametri dati i dati è proporzionale al prodotto della verosimiglianza (likelihood) dei dati dati i parametri e della distribuzione a priori dei parametri: p(parametri | dati) ∝ p(dati | parametri) × p(parametri). La verosimiglianza codifica il modello fisico che collega i parametri alle osservazioni e include il modello degli errori di misura. La distribuzione a priori codifica la conoscenza o le assunzioni sui parametri prima di osservare i dati.

Per problemi geoidali, la verosimiglianza è tipicamente gaussiana se assumiamo errori gaussiani non correlati: p(dati | parametri) ∝ exp[-χ²/2], dove χ² = ∑_i [(d_i^obs - d_i^pred)²/σ_i²] è il chi-quadrato, d_i^obs sono le osservazioni, d_i^pred sono le predizioni dal modello, e σ_i sono le deviazioni standard degli errori. La distribuzione a priori può essere gaussiana (corrispondente a regolarizzazione di Tikhonov) o avere altre forme (per esempio Laplaciana per favorire sparsità).

La distribuzione a posteriori fornisce informazione completa sulle incertezze: non solo il valore più probabile dei parametri (la moda a posteriori, o MAP estimate) ma anche la distribuzione di probabilità attorno a questo valore, le correlazioni tra parametri, e le incertezze marginali e condizionali. Tuttavia, per problemi ad alta dimensionalità (come modelli geoidali con decine di migliaia di coefficienti), la distribuzione a posteriori è una funzione in uno spazio di dimensione enorme che non può essere calcolata o visualizzata direttamente.

Metodi di campionamento Monte Carlo mediante catene di Markov (MCMC) forniscono un approccio computazionale per esplorare distribuzioni a posteriori ad alta dimensione. Questi metodi generano una sequenza di campioni (valori dei parametri) che, dopo un periodo di burn-in, sono distribuiti secondo la distribuzione a posteriori. Dall'insieme di campioni, si possono stimare statistiche di interesse: medie, varianze, percentili, correlazioni.

Algoritmi MCMC standard includono Metropolis-Hastings, Gibbs sampling, e Hamiltonian Monte Carlo (HMC). HMC è particolarmente efficiente per problemi ad alta dimensione

perché utilizza informazione sul gradiente della distribuzione a posteriori per proporre movimenti che esplorano efficacemente lo spazio dei parametri. Tuttavia, anche HMC può essere computazionalmente proibitivo per problemi geoidali globali con centinaia di migliaia di parametri.

Un'alternativa è l'inferenza variazionale, che approssima la distribuzione a posteriori con una forma parametrica più semplice (tipicamente gaussiana) e ottimizza i parametri di questa approssimazione per minimizzare la divergenza di Kullback-Leibler dalla vera distribuzione a posteriori. Questo è molto più rapido di MCMC ma fornisce solo un'approssimazione della vera distribuzione.

Per validazione pratica dei modelli geoidali, il cross-validation rimane uno degli approcci più robusti. Si divide il dataset in un set di training (usato per determinare il modello) e un set di validazione (usato per testare il modello). Si confrontano le predizioni del modello con le osservazioni di validazione e si calcolano statistiche di discrepanza (RMSE, bias, correlazione). Ripetendo questo processo con diverse suddivisioni dei dati (k-fold cross-validation), si ottiene una stima robusta dell'accuratezza predittiva del modello che è meno sensibile a over-fitting rispetto alla semplice valutazione sul set di training.

# Geoide e Ondulazioni Geoidali - Parte XVII

## Geodesia Planetaria Comparata ed Effetti Relativistici Avanzati

### Geoidi e Superfici Equipotenziali di Corpi Planetari

L'estensione dei concetti geodetici sviluppati per la Terra ad altri corpi del Sistema Solare rappresenta una frontiera affascinante della scienza planetaria che illumina sia le proprietà uniche della Terra sia i principi fisici universali che governano la forma e la struttura dei corpi celesti. Il concetto di geoide, sebbene originariamente sviluppato per il nostro pianeta, può essere generalizzato a qualsiasi corpo celeste che possieda un campo gravitazionale e, idealmente, una superficie fluida o equipotenziale di riferimento.

Per un corpo planetario generico, la superficie equipotenziale di riferimento analoga al geoide terrestre è definita come la superficie su cui il potenziale gravitazionale più il potenziale centrifugo (se il corpo ruota) ha un valore costante. Matematicamente, $W = V + \Phi_{centrifugo} = costante$, dove $V$ è il potenziale gravitazionale dovuto alla massa del corpo e $\Phi_{centrifugo} = -(1/2)\omega^2\rho^2$ rappresenta il potenziale centrifugo per un corpo in rotazione uniforme con velocità angolare $\omega$ ($\rho$ è la distanza dall'asse di rotazione).

Per corpi con superfici fluide estese, come i pianeti giganti gassosi (Giove, Saturno, Urano, Nettuno) o le lune con oceani subsuperficiali (Europa, Encelado), questa superficie equipotenziale ha una realizzazione fisica diretta. Per corpi con superfici solide (pianeti

terrestri, lune rocciose, asteroidi), la superficie equipotenziale è una costruzione matematica che può essere determinata dalle osservazioni del campo gravitazionale.

La Luna rappresenta il primo corpo extraterrestre per cui un "selenoide" (l'analogo lunare del geoide) è stato determinato con precisione. La Luna non ha atmosfera significativa né oceani, quindi il selenoide non ha la stessa interpretazione fisica del geoide terrestre come "livello medio del mare". Tuttavia, può essere definito come la superficie equipotenziale che meglio approssima la superficie fisica lunare o, più operativamente, come la superficie rispetto alla quale si definiscono le altezze topografiche.

Le missioni Lunar Reconnaissance Orbiter (LRO), GRAIL (Gravity Recovery and Interior Laboratory), e precedenti missioni Apollo e orbitali hanno permesso di determinare il campo gravitazionale lunare con risoluzione senza precedenti. GRAIL, in particolare, utilizzava due satelliti gemelli in orbita molto bassa (circa venticinque-cinquanta chilometri di altitudine) che misuravano variazioni della loro separazione con precisione micrometrica mediante ranging radio. Questa configurazione, analoga a GRACE per la Terra, ha rivelato la struttura del campo gravitazionale lunare fino a gradi armonici di circa settecento, corrispondenti a risoluzione spaziale di poche decine di chilometri.

Il selenoide lunare mostra caratteristiche drammaticamente diverse dal geoide terrestre. Le ondulazioni selenoidali raggiungono ampiezze di diverse centinaia di metri, molto maggiori delle ondulazioni geoidali terrestri (che sono tipicamente decine di metri). Questa differenza riflette principalmente la mancanza di processi convettivi vigorosi nel mantello lunare, che sulla Terra tendono a smorzare le anomalie gravitazionali a lungo termine, e la presenza di grandi bacini da impatto (i maria lunari visibili) riempiti di basalto denso che producono anomalie gravitazionali positive pronunciate chiamate "mascon" (mass concentrations).

I mascon lunari furono scoperti negli anni sessanta attraverso l'analisi delle perturbazioni orbitali delle missioni Lunar Orbiter. Questi sono anomalie gravitazionali positive di cento-duecento mGal associate ai grandi bacini d'impatto come Imbrium, Serenitatis, Crisium, e Orientale. L'origine dei mascon è dibattuta ma si ritiene sia legata alla combinazione di: riempimento dei bacini con lave basaltiche dense, sollevamento isostatico incompleto del mantello sotto i bacini, e possibile ispessimento crostale ai margini dei bacini.

Marte, il pianeta più studiato dopo la Terra, ha un "areoide" (da Ares, dio greco della guerra) determinato mediante tracking radio di numerosi orbiter e lander. Le missioni Mars Global Surveyor, Mars Odyssey, Mars Reconnaissance Orbiter, e altre hanno fornito dati gravitazionali di alta qualità. L'areoide marziano mostra variazioni di circa ±400 metri rispetto a un ellissoide di riferimento, con strutture correlate alle grandi province topografiche: il rigonfiamento di Tharsis (una vasta provincia vulcanica che include i maggiori vulcani del Sistema Solare), il bacino Hellas (uno dei più grandi crateri da impatto), e la dicotomia emisferica (l'emisfero nord di Marte è più basso e più liscio dell'emisfero sud).

Una caratteristica unica di Marte è l'esistenza di una definizione di "livello del mare" nonostante l'assenza di oceani. Il datum verticale standard per Marte è definito come la superficie equipotenziale su cui la pressione atmosferica media è 610,5 Pascal, corrispondente al punto triplo dell'acqua (dove acqua liquida, ghiaccio e vapore possono coesistere). Questa scelta è motivata dall'interesse astrobiologico nell'acqua liquida e fornisce una superficie di riferimento fisicamente significativa.

Venere, coperto da una densa atmosfera opaca, è stato mappato topograficamente mediante radar dalla missione Magellan negli anni novanta. Il "cieroide" di Venere (da Cytherea, epiteto greco di Afrodite/Venere) mostra ondulazioni di circa ±200 metri, significativamente minori di quelle marziane. Venere ruota molto lentamente (periodo di circa duecentotrentacinque giorni terrestri, retrogrado), quindi gli effetti centrifughi sono minimi e la forma è quasi sferica. Le anomalie gravitazionali sono correlate con grandi strutture vulcaniche e regioni di alto plateau, suggerendo che il mantello venusiano ha viscosità relativamente alta che permette il supporto a lungo termine di carichi topografici.

## Pianeti Giganti: Forme Oblate e Armoniche Gravitazionali

I pianeti giganti del Sistema Solare (Giove, Saturno, Urano, Nettuno) presentano sfide e caratteristiche uniche per la geodesia planetaria a causa della loro natura fluida, rotazione rapida, e forte schiacciamento polare. Questi pianeti non hanno superficie solida ma sono composti principalmente di idrogeno ed elio con transizione graduale da atmosfera gassosa a interno liquido metallico a profondità elevate.

La forma esterna osservabile di un pianeta gigante è una superficie equipotenziale nell'atmosfera dove la pressione assume un valore convenzionale (tipicamente un bar per Giove e Saturno). A causa della rapida rotazione, questi pianeti sono fortemente oblati: Giove ha un rapporto tra raggio equatoriale e polare di circa 1,0694 (schiacciamento f ≈ 0,0649), Saturno di circa 1,0980 (f ≈ 0,0980), valori enormemente maggiori dello schiacciamento terrestre (f ≈ 1/298 ≈ 0,00335).

Il campo gravitazionale dei pianeti giganti è caratterizzato da coefficienti armonici dominati dai termini zonali (indipendenti dalla longitudine) a causa della simmetria di rotazione. Il coefficiente J_2 (equivalente a -C_{20} nella notazione completamente normalizzata) è particolarmente grande: J_2 ≈ 14.696 × 10^{-3} per Giove, circa quattordici volte maggiore del valore terrestre. Questo riflette lo schiacciamento pronunciato e la struttura interna fortemente stratificata in densità.

I coefficienti armonici di ordine superiore (J_4, J_6, ...) contengono informazioni sulla distribuzione di densità interna e sulle correnti di rotazione differenziale nell'atmosfera e nell'interno fluido. Le missioni Juno (Giove) e Cassini (Saturno) hanno misurato questi coefficienti con precisione senza precedenti mediante tracking radio ultra-preciso durante passaggi ravvicinati.

Una scoperta notevole di Juno è che i coefficienti zonali di Giove mostrano deviazioni dal comportamento predetto da modelli di rotazione uniforme. In particolare, i coefficienti di ordine pari J_{4}, J_{6}, J_{8} sono sistematicamente maggiori (in valore assoluto) del previsto, suggerendo la presenza di correnti zonali (i caratteristici pattern di bande atmosferiche di Giove) che si estendono a profondità di tremila chilometri o più nell'interno, molto più profondamente di quanto precedentemente ipotizzato.

Saturno presenta complessità addizionali dovute all'interazione tra il campo gravitazionale del pianeta e quello del sistema di anelli. Gli anelli massivi (con massa totale circa 10^{19} kg, equivalente a una luna di duecento chilometri di diametro) esercitano forze gravitazionali sul pianeta che causano perturbazioni misurabili nell'orbita di satelliti e sonde. Durante la fase finale della missione Cassini (il Grand Finale), la sonda effettuò ventidue orbite tra il

pianeta e gli anelli, permettendo di separare accuratamente il campo gravitazionale del pianeta da quello degli anelli e rivelando che gli anelli sono sorprendentemente giovani (età stimata dieci-cento milioni di anni) basandosi sulla loro massa ridotta rispetto alle aspettative teoriche.

## Asteroidi e Piccoli Corpi: Forme Irregolari e Potenziali Non-Armonici

Gli asteroidi e le comete, con dimensioni tipiche da pochi chilometri a poche centinaia di chilometri, rappresentano un regime estremo per la geodesia planetaria dove le assunzioni di sfericità o quasi-sfericità che semplificano i calcoli per i grandi pianeti diventano completamente inadeguate. Questi piccoli corpi hanno forme spesso drammaticamente irregolari (ellissoidali, bilobate, angolate) e la loro gravità è così debole che la velocità di fuga dalla superficie è tipicamente pochi metri al secondo, comparabile alla velocità di camminata umana.

Il potenziale gravitazionale di un corpo irregolare non può essere rappresentato efficacemente mediante sviluppo in armoniche sferiche, che converge lentamente o non converge affatto per forme molto non-sferiche. Invece, si utilizzano rappresentazioni poliedriche: il corpo è approssimato come un poliedro composto di facce triangolari o quadrilatere, e il potenziale gravitazionale è calcolato come somma dei contributi di ciascuna faccia utilizzando formule analitiche derivate da Werner e Scheeres.

Il potenziale gravitazionale di un poliedro omogeneo con densità ρ è dato da V(P) = -G ρ *∑{facce} ω_f r_f · n_f - G ρ* ∑{spigoli} E_e r_e · L_e, dove la prima somma si estende su tutte le facce del poliedro (ω_f è l'angolo solido sotteso dalla faccia f vista dal punto P, r_f è un vettore dalla faccia a P, n_f è la normale alla faccia), e la seconda somma si estende su tutti gli spigoli (E_e è un fattore geometrico, r_e è un vettore dallo spigolo a P, L_e è un vettore lungo lo spigolo).

Questa rappresentazione poliedrica permette di calcolare il potenziale e il campo gravitazionale con precisione arbitraria data una rappresentazione sufficientemente dettagliata della forma, e ha il vantaggio di essere esatta (non un'approssimazione) per corpi con densità uniforme. Per corpi con densità variabile, si può suddividere l'interno in poliedri multipli con densità diverse.

Le missioni spaziali verso asteroidi come NEAR Shoemaker (asteroide Eros), Hayabusa (Itokawa), Dawn (Vesta e Cerere), OSIRIS-REx (Bennu), e Hayabusa2 (Ryugu) hanno rivelato che questi corpi hanno una diversità straordinaria di forme, composizioni e proprietà gravitazionali. Eros è un asteroide a forma di patata allungata (dimensioni circa 34 × 11 × 11 km) con superficie coperta di regolite (polvere e detriti). Il suo campo gravitazionale è altamente irregolare, con variazioni locali di gravità di oltre il cinquanta % tra regioni diverse.

Itokawa è un corpo bilobato (due lobi connessi da un "collo" stretto) che si ritiene sia un pile di detriti (rubble pile) tenuto insieme solo dalla propria gravità debole. Le osservazioni di Hayabusa hanno rivelato che Itokawa ha densità globale di circa 1.900 kg/m³, significativamente inferiore alla densità della roccia solida (tipicamente 2.500-3.500 kg/m³), indicando che l'interno è altamente poroso (porosità stimata trenta-quaranta %).

Bennu e Ryugu, target delle missioni OSIRIS-REx e Hayabusa2, sono entrambi asteroidi "top-shaped" (a forma di trottola) con rigonfiamento equatoriale pronunciato. Questa forma si ritiene essere causata dalla rotazione rapida combinata con la natura di pile di detriti, che permette al materiale di redistribuirsi sotto l'influenza della forza centrifuga. Le osservazioni rivelano che questi corpi hanno periodi di rotazione di poche ore, vicini al limite di stabilità oltre il quale la forza centrifuga all'equatore supererebbe la gravità, causando dispersione di materiale.

Un fenomeno affascinante osservato su alcuni asteroidi è l'esistenza di "satelliti binari" o sistemi multipli, dove due o più corpi orbitano attorno al loro centro di massa comune. L'esempio più studiato è il sistema Plutone-Caronte, dove Caronte ha massa circa un ottavo di quella di Plutone e i due corpi orbitano a una distanza di circa ventimila chilometri con periodo di circa sei giorni. Plutone e Caronte sono "tidally locked" (accoppiati marealmente), mostrando sempre la stessa faccia l'uno all'altro, risultato dell'evoluzione delle maree che ha dissipato energia e momento angolare orbitale.

## Effetti Relativistici di Ordine Superiore nel Campo Gravitazionale Terrestre

La relatività generale predice correzioni al campo gravitazionale newtoniano che, per la Terra, sono piccolissime ma non completamente trascurabili alle precisioni estreme raggiungibili con le moderne tecnologie geodetiche. Le correzioni relativistiche principali possono essere organizzate in una espansione post-newtoniana (post-Newtonian expansion) dove si sviluppa la metrica spazio-temporale in potenze di $v^2/c^2$ e $GM/(c^2r)$, dove $v$ è una velocità caratteristica, $c$ la velocità della luce, $G$ la costante gravitazionale, $M$ la massa, e $r$ una distanza caratteristica.

Per la Terra, $GM/(c^2R) \approx (3{,}986 \times 10^{14}\ m^3/s^2) / [(3 \times 10^8\ m/s)^2 \times (6{,}371 \times 10^6\ m)] \approx 6{,}95 \times 10^{-10}$, un numero adimensionale estremamente piccolo. Le velocità orbitali dei satelliti sono $v \approx 7.000$-$8.000$ m/s, quindi $v^2/c^2 \approx (7.500\ m/s)^2 / (3 \times 10^8\ m/s)^2 \approx 6{,}25 \times 10^{-10}$, dello stesso ordine di grandezza. Le correzioni relativistiche sono quindi dell'ordine di $10^{-9}$ o $10^{-10}$ rispetto alle quantità newtoniane.

La correzione relativistica principale al potenziale gravitazionale è il potenziale post-newtoniano di ordine 1PN (first post-Newtonian), che include termini proporzionali a $(GM/(c^2r))^2$. Per un corpo sferico di massa $M$, il potenziale 1PN è $V_{1PN} = -(GM/r)[1 + (1/2)(v^2/c^2) + (3/2)(GM)/(c^2r)]$, dove il primo termine è il potenziale newtoniano, il secondo termine rappresenta correzioni cinetiche, e il terzo termine correzioni gravitazionali pure.

Per il campo gravitazionale terrestre espresso in armoniche sferiche, le correzioni relativistiche modificano i coefficienti armonici. Il coefficiente monopolare (termine di grado zero) riceve una correzione dell'ordine di $(GM)/(c^2R)$, corrispondente a una variazione relativa di circa $7 \times 10^{-10}$. Per le anomalie gravitazionali (derivate del potenziale), le correzioni relativistiche sono tipicamente dell'ordine di $10^{-3}$ mGal, molto al di sotto della precisione delle misurazioni gravimetriche terrestri ordinarie ma rilevabili con gravimetri superconduttori o gravimetri atomici.

Un effetto relativistico particolarmente interessante è il trascinamento dello spazio-tempo (frame-dragging o effetto Lense-Thirring), predetto dalla relatività generale per corpi rotanti. La rotazione terrestre induce un "trascinamento" dello spazio-tempo circostante, causando una precessione degli assi orbitali dei satelliti. L'ampiezza di questa precessione per un satellite in orbita polare a quota di circa 650 km è circa 39 millisecondi d'arco per anno, un effetto piccolissimo ma che è stato misurato dalla missione Gravity Probe B utilizzando giroscopi ultraprecisi.

Il trascinamento del frame può anche essere descritto in termini di un potenziale gravitomagnetico, analogo al potenziale magnetico dell'elettromagnetismo. Questo potenziale gravitomagnetico è proporzionale al momento angolare terrestre J = I ω, dove I è il momento di inerzia e ω il vettore velocità angolare. Il potenziale gravitomagnetico produce forze che agiscono su masse in movimento, analoghe alle forze magnetiche su cariche elettriche in movimento.

Per applicazioni geodetiche estremamente precise, come la definizione di sistemi di riferimento spazio-temporali per navigazione o sincronizzazione di orologi a precisioni meglio di nanosecondo, le correzioni relativistiche devono essere incluse esplicitamente. Il Sistema di Riferimento Terrestre Internazionale (International Terrestrial Reference System, ITRS) e il Sistema di Riferimento Celeste Internazionale (International Celestial Reference System, ICRS) includono specificazioni dettagliate di come incorporare gli effetti relativistici nelle trasformazioni tra sistemi di coordinate e nelle predizioni di orbite satellitari.

## Effetti Relativistici sugli Orologi e Cronometria Geodetica

Come discusso precedentemente, la relatività generale predice che la frequenza di un orologio dipende dal potenziale gravitazionale nella sua posizione: orologi a potenziale gravitazionale maggiore (più lontani dalle masse) camminano più velocemente di orologi a potenziale minore. Questo effetto, noto come red-shift gravitazionale, è stato verificato sperimentalmente fin dall'esperimento di Pound e Rebka nel 1960, che utilizzò assorbimento risonante di raggi gamma per misurare lo shift di frequenza su una differenza di altezza di ventidue metri.

Per due orologi a potenziali gravitazionali U_1 e U_2, la differenza di frequenza relativa è $\Delta f/f = (U_2 - U_1)/c^2 = \Delta U/c^2$. Per una differenza di altezza $\Delta h$ sulla superficie terrestre, $\Delta U \approx g \Delta h$, quindi $\Delta f/f \approx (g \Delta h)/c^2 \approx (9{,}81\ m/s^2 \times \Delta h) / (3 \times 10^8\ m/s)^2 \approx 1{,}09 \times 10^{-16} \times \Delta h$ [metri]. Per $\Delta h = 1$ m, $\Delta f/f \approx 1{,}09 \times 10^{-16}$, corrispondente a un orologio che guadagna circa $3{,}4 \times 10^{-9}$ secondi per anno a un metro di altezza superiore.

Gli orologi atomici ottici moderni hanno stabilità di frequenza che si avvicina a $10^{-18}$, rendendo misurabile l'effetto gravitazionale su differenze di altezza dell'ordine del centimetro. Questa capacità apre la possibilità di cronometria geodetica: la determinazione di differenze di potenziale gravitazionale (e quindi di altezza) mediante confronto di frequenze di orologi ultra-precisi.

Il confronto di orologi remoti richiede la trasmissione di segnali di tempo tra le due località. Questi segnali possono essere trasmessi via fibra ottica, via collegamenti radio a microonde, o via satelliti. Ciascun metodo ha vantaggi e limitazioni. Le fibre ottiche permettono trasmissione con bassissimo rumore e alta stabilità ma sono limitate a distanze

relativamente brevi (centinaia di chilometri). I collegamenti radio e satellitari permettono copertura globale ma sono soggetti a ritardi variabili dovuti all'atmosfera e richiedono correzioni accurate.

Una complicazione interessante emerge dal fatto che i segnali elettromagnetici utilizzati per comparare gli orologi viaggiano attraverso lo spazio-tempo curvato dalla gravità terrestre. Il percorso effettivo dei segnali è leggermente deviato (effetto di deflessione gravitazionale della luce, verificato durante le eclissi solari da Arthur Eddington nel 1919) e il tempo di transito è leggermente ritardato (ritardo di Shapiro, misurato mediante radar planetario negli anni sessanta). Per confronti di orologi a livello di 10^{-18}, questi effetti devono essere modellati accuratamente.

Un risultato affascinante della cronometria relativistica è che la definizione di "simultaneità" diventa ambigua in presenza di gravità. In relatività speciale (senza gravità), la simultaneità è relativa alla velocità ma può essere definita consistentemente mediante sincronizzazione di Einstein usando segnali luminosi. In relatività generale, non esiste una definizione unica di simultaneità per osservatori a potenziali diversi. Orologi sincronizzati secondo una convenzione diventeranno de-sincronizzati secondo un'altra convenzione.

Per applicazioni geodetiche, si adotta tipicamente la convenzione del Tempo Coordinato Geocentrico (Geocentric Coordinate Time, TCG), che è il tempo proprio di un orologio fittizio situato all'infinito (dove il potenziale gravitazionale è zero). Tutti gli orologi sulla Terra e nelle sue vicinanze camminano più lentamente rispetto a TCG, con velocità che dipende dal loro potenziale. La differenza tra TCG e il Tempo Atomico Internazionale (TAI, realizzato mediante media pesata di orologi atomici distribuiti globalmente) accumula circa 0,7 secondi per anno, riflettendo il potenziale gravitazionale medio degli orologi che realizzano TAI.

## Coupling tra Rotazione Terrestre, Campo Gravitazionale e Deformazioni

La rotazione terrestre, il campo gravitazionale e le deformazioni della Terra solida sono fenomeni intimamente accoppiati attraverso processi geodinamici complessi. La rotazione terrestre non è uniforme ma varia su molteplici scale temporali a causa di ridistribuzioni di massa, interazioni gravitazionali con altri corpi celesti, e dissipazione mareale.

Le variazioni principali della rotazione terrestre includono: cambiamenti nella lunghezza del giorno (Length of Day, LOD), causati da trasferimenti di momento angolare tra la Terra solida e l'atmosfera, gli oceani, o l'interno fluido; movimento polare (polar motion), lo spostamento dell'asse istantaneo di rotazione rispetto alla crosta, con componenti principal di circa quattordici mesi (oscillazione di Chandler, un modo proprio della Terra deformabile) e annuale (dovuta a ridistribuzioni stagionali di massa atmosferica e idrologica); e precessione-nutazione, variazioni dell'orientamento dell'asse di rotazione nello spazio inerziale su scale temporali da giorni a millenni, causate principalmente da forze di marea lunari e solari agenti sul rigonfiamento equatoriale terrestre.

Le variazioni di LOD mostrano fluttuazioni su scale temporali da giorni (associate a tempeste atmosferiche e variazioni della circolazione atmosferica) a decenni (correlate con cambiamenti nella circolazione oceanica e possibilmente con processi nel nucleo esterno). Le variazioni decadali hanno ampiezza tipica di qualche millisecondo e sono state storicamente misurate mediante osservazioni astronomiche, ma ora sono monitorate

continuamente con precisione di microsecondo mediante tecniche di geodesia spaziale (VLBI, GNSS, SLR).

Il coupling tra rotazione e campo gravitazionale si manifesta attraverso la forza centrifuga. Una variazione della velocità di rotazione $\Delta\omega$ causa una variazione del potenziale centrifugo $\Delta\Phi_{centrifugo} = -(1/2)(2\omega\,\Delta\omega + \Delta\omega^2)\rho^2$, che induce deformazioni elastiche della Terra e modifiche del campo gravitazionale. Per variazioni di LOD dell'ordine di millisecondo, le variazioni corrispondenti del coefficiente $J_2$ sono dell'ordine di $10^{-11}$, piccolissime ma misurabili con osservazioni satellitari di lungo periodo.

Il movimento polare è particolarmente interessante perché coinvolge un accoppiamento tra la rotazione e le proprietà elastiche e visco-elastiche della Terra. L'oscillazione di Chandler, con periodo di circa quattordici mesi (invece dei dieci mesi predetti per una Terra rigida), riflette la deformabilità della Terra: il momento di inerzia effettivo è aumentato dalle deformazioni di marea, allungando il periodo. L'ampiezza dell'oscillazione di Chandler è tipicamente cinque-dieci metri alla superficie, ma varia nel tempo, richiedendo eccitazione continua da processi geofisici (principalmente redistribuzioni di massa atmosferica e oceanica, possibilmente con contributi da terremoti grandi e da processi nel nucleo).

Le osservazioni del movimento polare sono utilizzate per dedurre informazioni sulla struttura interna e le proprietà reologiche della Terra. La dissipazione di energia nell'oscillazione di Chandler (che richiederebbe che l'ampiezza decadesse in circa sessanta anni se non fosse continuamente eccitata) fornisce vincoli sull'anelasticità del mantello. Le variazioni a lungo termine dell'orientamento medio dell'asse di rotazione rispetto alla crosta (polar wander secolare) riflettono redistribuzioni di massa permanenti o di lunghissima durata, come il recupero post-glaciale isostatico o la convezione mantellica.

La missione GRACE ha rivelato che le variazioni del coefficiente $J_2$ misurate da tracking satellitare sono altamente correlate con le variazioni previste da ridistribuzioni di massa idrologica e criosferica. Durante eventi El Niño, quando enormi quantità di acqua sono redistribuite dal Pacifico occidentale al Pacifico orientale, sia $J_2$ sia il movimento polare mostrano anomalie misurabili. Questa correlazione conferma che i processi di superficie e atmosferici giocano un ruolo dominante nell'eccitazione della variabilità della rotazione terrestre su scale temporali da mesi a pochi anni.

Su scale temporali geologiche (milioni di anni), il rallentamento della rotazione terrestre dovuto alla dissipazione mareale ha effetti profondi sull'evoluzione del sistema Terra-Luna. L'analisi di bande di crescita in coralli fossili (che registrano i cicli di marea giornalieri e mensili) indica che nel Devoniano (circa quattrocento milioni di anni fa) l'anno aveva circa quattrocento giorni, implicando che il giorno era circa 21,9 ore. Estrapolando indietro, si stima che quando la Luna si formò (circa 4,5 miliardi di anni fa), il giorno terrestre era lungo solo circa sei ore e la Luna orbitava a distanza molto minore, forse solo venti-trentamila chilometri (attualmente la distanza è circa 384.000 km).

# Geoide e Ondulazioni Geoidali - Parte XVIII (Conclusione)

# Storia della Geodesia, Evoluzione Concettuale e Dimensioni Filosofiche della Misurazione della Terra

## Le Origini Antiche: Dalla Speculazione Filosofica alla Misurazione Quantitativa

La questione della forma della Terra rappresenta uno dei problemi scientifici più antichi che l'umanità abbia affrontato, con radici che si estendono nelle speculazioni cosmologiche delle civiltà più remote. L'evoluzione della nostra comprensione della forma terrestre riflette non solo progressi tecnologici e matematici ma anche profonde trasformazioni epistemologiche nel modo in cui l'umanità concepisce la conoscenza della natura.

Nelle cosmologie più antiche delle civiltà mesopotamiche, egizie e cinesi, la Terra era generalmente concepita come piatta, un disco o un rettangolo galleggiante su un oceano primordiale e coperto da una volta celeste semisferica. Questa concezione rifletteva l'esperienza immediata e l'osservazione locale: entro l'orizzonte limitato dell'osservatore individuale, la superficie terrestre appare effettivamente piatta, e la curvatura globale non è percepibile senza osservazioni sistematiche su distanze di centinaia di chilometri o fenomeni indiretti.

La rivoluzione intellettuale che portò al riconoscimento della sfericità terrestre avvenne nella Grecia antica del sesto e quinto secolo avanti Cristo, in un contesto culturale che valorizzava la speculazione razionale, l'argomentazione logica e la ricerca di principi universali che trascendessero l'apparenza immediata. I filosofi presocratici, in particolare i Pitagorici, proposero vari argomenti a favore di una Terra sferica basati su considerazioni di simmetria e perfezione geometrica. Per i Pitagorici, la sfera era la forma perfetta, e quindi i corpi celesti, inclusa la Terra, dovevano essere sferici.

Aristotele, nel quarto secolo avanti Cristo, presentò nella sua opera "De Caelo" (Sui cieli) argomenti empirici convincenti per la sfericità terrestre che trascendevano la speculazione metafisica. Tre argomenti aristotelici furono particolarmente influenti. Primo, durante le eclissi lunari, l'ombra della Terra proiettata sulla Luna è sempre circolare, indipendentemente dalla posizione della Luna nel cielo. Un disco piatto proietterebbe ombre di forme diverse a seconda dell'orientamento, mentre solo una sfera proietta ombre circolari da tutte le direzioni. Secondo, stelle che sono visibili da certe latitudini meridionali non sono visibili da latitudini settentrionali, e viceversa, indicando che la superficie terrestre è curva in direzione nord-sud. Terzo, le navi che si allontanano verso l'orizzonte scompaiono gradualmente, con lo scafo che sparisce prima dell'alberatura, coerente con una superficie curva.

La misurazione quantitativa della dimensione della Terra sferica fu realizzata nel terzo secolo avanti Cristo da Eratostene di Cirene, direttore della Biblioteca di Alessandria. Eratostene sapeva che a Syene (l'odierna Assuan, nell'alto Egitto) al mezzogiorno del solstizio estivo, il Sole era esattamente allo zenit, illuminando il fondo di pozzi profondi senza produrre ombre. Nello stesso momento ad Alessandria, circa ottocento chilometri a nord, il Sole non era allo zenit ma formava un angolo con la verticale.

Eratostene misurò questo angolo osservando l'ombra di un bastone verticale (gnomone) e determinò che fosse circa un cinquantesimo di cerchio completo, ovvero circa 7,2 gradi. Assumendo che Alessandria e Syene fossero sullo stesso meridiano (un'approssimazione ragionevole) e che il Sole fosse così lontano che i suoi raggi fossero effettivamente paralleli quando raggiungono la Terra, l'angolo misurato ad Alessandria doveva essere uguale all'angolo al centro della Terra sotteso dall'arco Alessandria-Syene.

Se 7,2 gradi corrisponde a ottocento chilometri, allora l'intero cerchio di trecentosessanta gradi corrisponde a una circonferenza di circa 360/7,2 × 800 ≈ 40.000 km, da cui un raggio terrestre di circa 6.366 km. Questo valore è straordinariamente vicino al valore moderno del raggio medio terrestre (circa 6.371 km), un risultato notevole considerando le limitazioni delle misurazioni antiche e le approssimazioni coinvolte.

Il metodo di Eratostene è degno di nota non solo per il risultato numerico ma anche per il suo approccio metodologico. Egli combinò osservazioni astronomiche (la posizione del Sole), geometria (le proprietà degli angoli e dei cerchi), e misurazione di distanza terrestre (la distanza Alessandria-Syene, probabilmente stimata dai tempi di viaggio di carovane). Questo approccio multi-disciplinare, integrando osservazioni celesti e terrestri attraverso principi geometrici, divenne il paradigma della geodesia per i successivi due millenni.

## Il Medioevo e il Rinascimento: Preservazione e Rinascita della Conoscenza Geodetica

Durante il periodo medievale europeo, la conoscenza geodetica greca fu parzialmente preservata e trasmessa attraverso traduzioni arabe e latine, sebbene con perdita di dettagli tecnici e matematici. Nel mondo islamico medievale, astronomi e geografi come Al-Biruni (973-1058) effettuarono misurazioni geodetiche sofisticate. Al-Biruni determinò il raggio terrestre mediante un metodo ingegnoso che non richiedeva misurazioni di lunghe distanze terrestri: osservò l'angolo di depressione dell'orizzonte dalla cima di una montagna di altezza nota, e utilizzando trigonometria sferica calcolò il raggio terrestre con risultato molto accurato.

Il Rinascimento europeo vide una rinascita dell'interesse per la geodesia, stimolata dalle esplorazioni geografiche e dalla necessità di cartografia accurata per la navigazione oceanica. Le circumnavigazioni di Magellano (1519-1522) e altri esploratori fornirono conferma empirica diretta della sfericità terrestre e stimolarono interesse per determinazioni sempre più precise delle dimensioni e della forma del globo.

Nel diciassettesimo secolo, l'invenzione del telescopio e lo sviluppo di strumenti geodetici di precisione (teodoliti, livelli, orologi pendolari) permisero misurazioni di triangolazioni geodetiche estese. Jean Picard in Francia condusse nel 1669-1670 lla prima misurazione moderna di un arco di meridiano utilizzando triangolazione sistematica, determinando il raggio terrestre con errore di circa 0,1 %.

Tuttavia, le misurazioni di Picard e dei suoi successori rivelarono discrepanze che non potevano essere spiegate assumendo una Terra perfettamente sferica. Misurazioni di archi di meridiano di uguale lunghezza angolare a latitudini diverse sembravano dare lunghezze terrestri diverse, suggerendo che la Terra non fosse sferica ma ellissoidale.

## Il Grande Dibattito: Terra Oblata vs Prolata

Uno dei dibattiti scientifici più significativi del diciottesimo secolo riguardò la forma precisa della Terra: era schiacciata ai poli (oblata, come un'arancia) o allungata ai poli (prolata, come un limone)? Questo dibattito aveva implicazioni non solo geodetiche ma anche per la fisica newtoniana della gravitazione e della rotazione.

Isaac Newton, nella sua opera Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica (1687), aveva teorizzato basandosi su considerazioni della rotazione terrestre che la Terra dovesse essere oblata. La rotazione produce forza centrifuga massima all'equatore e nulla ai poli. In equilibrio idrostatico, un fluido rotante assume forma oblata dove il rigonfiamento equatoriale compensa la forza centrifuga. Newton calcolò che lo schiacciamento dovesse essere circa $f \approx 1/230$.

In contrasto, le misurazioni geodetiche francesi condotte dalla famiglia Cassini (Jean-Dominique Cassini e suo figlio Jacques Cassini) nel tardo diciassettesimo e primo diciottesimo secolo suggerivano una Terra prolata. Misurando archi di meridiano in Francia, i Cassini conclusero che i gradi di latitudine erano più corti vicino all'equatore e più lunghi vicino ai poli, implicando prolatura.

Questo conflitto tra teoria newtoniana ed evidenza osservativa apparente condusse l'Académie Royale des Sciences a organizzare due spedizioni ambiziose per risolvere la questione. Nel 1735, una spedizione guidata da Pierre Louis Maupertuis fu inviata in Lapponia (vicino al Circolo Polare Artico) per misurare un arco di meridiano a latitudine alta. Nel 1736, un'altra spedizione guidata da Charles Marie de La Condamine fu inviata in Perù (vicino all'equatore) per misurare un arco equatoriale.

Queste spedizioni furono imprese epiche, richiedendo anni di lavoro in condizioni estreme. La spedizione in Lapponia dovette operare in inverno artico con temperature ben sotto zero. La spedizione in Perù affrontò terreno montagnoso della Ande, malattie tropicali, e ostacoli burocratici coloniali, richiedendo quasi un decennio per completare le misurazioni.

I risultati, pubblicati nel 1738 (Lapponia) e 1744 (Perù), furono inequivocabili: i gradi di latitudine erano più lunghi in Lapponia che in Perù, confermando che la Terra è oblata. Newton aveva ragione, e i dati precedenti dei Cassini erano affetti da errori sistematici non riconosciuti. Questo risultato fu un trionfo per la fisica newtoniana e stabilì l'oblatura come fatto empirico, riconciliando teoria e osservazione.

Le spedizioni geodetiche del diciottesimo secolo stabilirono anche un paradigma metodologico per la scienza: quando teoria ed esperimento sembrano contraddirsi, sono necessarie misurazioni migliori e più estensive in condizioni più diversificate per risolvere l'ambiguità. Inoltre, dimostrarono che questioni scientifiche fondamentali possono richiedere collaborazione internazionale, investimenti sostanziali, e progetti di lungo termine.

## Il Diciannovesimo Secolo: Verso la Geodesia Moderna e il Concetto di Geoide

Il diciannovesimo secolo vide un'esplosione di attività geodetica sistematica, guidata da motivazioni sia scientifiche (migliorare la comprensione della forma terrestre e della

gravitazione) sia pratiche (produrre mappe accurate per scopi militari, amministrativi e commerciali). Numerosi paesi europei e nordamericani avviarono survey geodetici nazionali che triangolarono interi territori, stabilirono reti di capisaldi, e misurarono archi di meridiano e parallelo estesi.

Carl Friedrich Gauss, il grande matematico tedesco, contribuì significativamente alla geodesia sia teoricamente sia praticamente. Teoricamente, Gauss sviluppò la teoria delle superfici curve (geometria differenziale), includendo concetti come la curvatura gaussiana che sono fondamentali per comprendere la geometria intrinseca di superfici come la Terra. Praticamente, Gauss condusse survey geodetici nel Regno di Hannover tra il 1820 e il 1824, sviluppando metodi innovativi di osservazione e calcolo.

Friedrich Wilhelm Bessel, astronomo e geodeta prussiano, effettuò nel 1837 una delle prime determinazioni precise dei parametri dell'ellissoide terrestre utilizzando misurazioni di archi di meridiano da diverse località. L'ellissoide di Bessel, con semiasse maggiore 6.377.397 metri e schiacciamento 1/299,15, fu ampiamente utilizzato come riferimento geodetico in Europa e Asia per oltre un secolo.

Il concetto moderno di geoide emerse nel diciannovesimo secolo attraverso i lavori di Johann Benedict Listing, che nel 1863 introdusse il termine "geoide" (dal greco ge = terra e eidos = forma) per denotare la forma fisica della Terra definita mediante la superficie equipotenziale del campo gravitazionale che coincide approssimativamente con il livello medio del mare. Questa definizione spostava l'enfasi da una descrizione puramente geometrica (ellissoide) a una definizione fisica basata sul potenziale gravitazionale.

Friedrich Robert Helmert, geodeta tedesco, sviluppò nel tardo diciannovesimo secolo una teoria matematica rigorosa del geoide e della sua relazione con l'ellissoide di riferimento e con le misurazioni gravimetriche. Nel suo trattato monumentale "Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie" (Le teorie matematiche e fisiche della geodesia superiore, 1884), Helmert formulò le equazioni fondamentali che collegano anomalie di gravità, deviazioni della verticale, e ondulazioni geoidali, stabilendo il framework teorico per la geodesia fisica moderna.

George Gabriel Stokes, matematico e fisico britannico-irlandese, derivò nel 1849 la celebre formula integrale che porta il suo nome, esprimendo l'ondulazione geoidale come integrale delle anomalie di gravità sulla superficie terrestre. La formula di Stokes, discussa estensivamente nelle parti precedenti di questo saggio, rimane una delle relazioni fondamentali della geodesia fisica e rappresenta uno dei risultati più eleganti dell'analisi matematica applicata.

## Il Ventesimo Secolo: Tecnologie Rivoluzionarie e Geodesia Spaziale

Il ventesimo secolo fu testimone di trasformazioni radicali nella geodesia attraverso l'introduzione di tecnologie completamente nuove che estesero le capacità osservative di ordini di granditudine. L'aviazione permise fotogrammetria aerea sistematica, producendo mappe topografiche dettagliate di vasti territori con sforzo ridotto rispetto ai survey terrestri tradizionali. Il radar e il sonar estesero le capacità di mappatura a regioni precedentemente inaccessibili come oceani profondi e superfici coperte da vegetazione densa.

La rivoluzione più profonda, tuttavia, venne dallo spazio. Il lancio del primo satellite artificiale, lo Sputnik sovietico nel 1957, aprì l'era della geodesia satellitare. Le orbite dei satelliti sono perturbate dal campo gravitazionale terrestre, e l'analisi precisa di queste perturbazioni mediante tracking radio permette di dedurre le caratteristiche del campo gravitazionale su scala globale.

I programmi satellitari geodetici come Transit, GEOS, LAGEOS, e successivamente i sistemi di posizionamento globale (GPS, GLONASS, Galileo, BeiDou) trasformarono la geodesia da scienza basata su misurazioni terrestri laboriose e lente a scienza basata su osservazioni spaziali continue e globali. La precisione del posizionamento migliorò da metri (survey tradizionali) a centimetri (GPS differenziale) a millimetri (tecniche interferometriche).

Le missioni gravimetriche satellitari dedicate, discusse estensivamente nelle parti precedenti (CHAMP, GRACE, GOCE), rappresentarono il culmine di questa evoluzione, fornendo mappe del campo gravitazionale globale con dettagli e accuratezza impossibili con misurazioni terrestri o con tracking di satelliti singoli. GRACE, in particolare, con la sua capacità di rilevare variazioni temporali del campo gravitazionale, aprì una nuova finestra sui processi dinamici del sistema Terra, dalla idrologica continentale allo scioglimento dei ghiacci polari.

Il ventunesimo secolo sta vedendo l'integrazione sempre più stretta di tecnologie geodetiche multiple in sistemi di osservazione globali. Reti di stazioni GNSS permanenti monitorano continuamente movimenti tettonici, deformazioni crostali, e variazioni dell'atmosfera. Satelliti altimetrici forniscono serie temporali decadali del livello del mare con precisione millimetrica. Interferometria radar satellitare (InSAR) misura deformazioni superficiali con risoluzione spaziale di metri e precisione verticale millimetrica. L'integrazione di questi dataset attraverso tecniche di data fusion e assimilazione sta creando una visione sempre più completa e dinamica del pianeta.

## Dimensioni Epistemologiche: Natura della Misurazione Geodetica

La storia della geodesia solleva questioni epistemologiche profonde sulla natura della conoscenza scientifica e sulla relazione tra teoria, osservazione e realtà fisica. Alcune di queste questioni meritano riflessione esplicita perché illuminano non solo la geodesia ma la scienza in generale.

Una prima questione riguarda la relazione tra modelli matematici e realtà fisica. L'ellissoide di riferimento è un oggetto matematico perfettamente definito da pochi parametri, liscio e regolare. Il geoide è una superficie fisica, definita mediante una proprietà del campo gravitazionale reale, che è irregolare e riflette la complessità della distribuzione di massa terrestre. La superficie fisica della Terra è ancora più complessa, con montagne, oceani, e variazioni su tutte le scale.

Quale di queste "superfici" rappresenta la "vera" forma della Terra? La risposta dipende dal contesto e dallo scopo. Per la navigazione e la cartografia, l'ellissoide è spesso sufficiente e praticamente conveniente. Per applicazioni che coinvolgono il flusso di fluidi (acque superficiali, oceani), il geoide è fondamentale perché i fluidi seguono superfici equipotenziali. Per studiare processi geologici o ecologici, la superficie fisica topografica è rilevante.

Questa molteplicità di rappresentazioni non riflette confusione o ambiguità ma piuttosto la ricchezza e la complessità del fenomeno studiato. Modelli diversi catturano aspetti diversi della realtà e sono appropriati per scopi diversi. La scienza non cerca una singola descrizione "vera" che escluda tutte le altre, ma piuttosto un insieme coerente di descrizioni complementari che, prese insieme, forniscono comprensione profonda e capacità predittiva.

Una seconda questione epistemologica riguarda il ruolo della teoria nella interpretazione delle osservazioni. Le misurazioni gravimetriche grezze sono semplicemente numeri: accelerazioni in punti specifici. La trasformazione di questi numeri in un'ondulazione geoidale richiede un edificio teorico elaborato: la teoria del potenziale gravitazionale, l'equazione di Laplace, lo sviluppo in armoniche sferiche, la formula di Stokes. Senza questa teoria, le misurazioni sarebbero opache, numeri sconnessi senza significato coerente.

Questo illustra che la scienza moderna è caratterizzata da "carico teorico" (theory-ladenness) delle osservazioni: ciò che osserviamo e come interpretiamo le osservazioni dipendono dalle teorie che portiamo all'osservazione. Questo non significa che le osservazioni siano arbitrarie o che "costruiamo" la realtà attraverso le nostre teorie. Piuttosto, significa che teoria ed osservazione sono intimamente intrecciate in un processo dialettico dove ciascuna informa e vincola l'altra.

La capacità predittiva è il criterio ultimo di successo scientifico. Una teoria geodetica è validata non dalla sua eleganza matematica astratta ma dalla sua capacità di predire accuratamente i risultati di nuove misurazioni in nuove località. Il fatto che modelli geoidali derivati da dati gravimetrici predicano accuratamente altezze GPS/livellazione in località indipendenti non utilizzate nella costruzione del modello è una conferma potente della validità della teoria sottostante.

## La Dimensione Estetica della Geodesia

C'è una dimensione estetica nella geodesia che raramente viene articolata esplicitamente ma che è sentita profondamente da coloro che lavorano nel campo. L'eleganza della formula di Stokes, che trasforma un integrale su una superficie sferica di quantità misurabili (anomalie di gravità) in una proprietà geometrica (ondulazione), ha una bellezza matematica che risuona con il senso estetico degli scienziati. La simmetria delle armoniche sferiche, che scompongono la complessità del campo gravitazionale in componenti con proprietà geometriche pure, incarna un ordine che sembra trascendere il particolare ed avvicinarsi all'universale.

Ma c'è anche un'estetica più terrena nella geodesia: la bellezza delle mappe che rappresentano la complessità della superficie terrestre con chiarezza e precisione, le visualizzazioni del geoide che rivelano le strutture nascoste del campo gravitazionale, le serie temporali che catturano le pulsazioni dinamiche del pianeta vivente. Queste rappresentazioni sono al contempo scientificamente informative ed esteticamente appaganti, unendo funzione e forma in modi che ricordano le grandi opere d'arte.

La ricerca della precisione sempre maggiore nella geodesia ha anche una dimensione quasi ascetica: la disciplina rigorosa richiesta per eliminare fonti di errore, la meticolosità nelle osservazioni e nei calcoli, la vigilanza contro l'autoillusione e il wishful thinking. Questa disciplina è necessaria perché la natura non è particolarmente cooperativa: i segnali di

interesse sono spesso piccoli, sepolti nel rumore, e richiedono pazienza, ingegnosità e perseveranza per essere estratti.

## La Geodesia e l'Identità Umana

In una prospettiva più ampia, la geodesia può essere vista come espressione di un impulso umano fondamentale: il desiderio di conoscere e comprendere il luogo che abitiamo, di mappare e orientarci nel mondo, di ridurre l'ignoto al conosciuto. Questo impulso ha radici pratiche nell'esigenza di navigazione e orientamento, ma trascende l'utilità immediata per toccare qualcosa di più profondo sull'identità umana come specie che cerca significato e ordine nell'universo.

Le antiche mappe mundi, che rappresentavano il mondo conosciuto circondato da oceani e regioni inesplorate abitate da creature mitiche, riflettevano tanto le cosmologie e le paure delle culture che le crearono quanto le realtà geografiche. Le moderne mappe geodetiche globali, che rappresentano ogni metro quadrato della superficie terrestre con precisione centimetrica, riflettono la nostra era caratterizzata da tecnologia satellitare, computazione globale, e ambizioni di comprensione totale.

Eppure, anche con tutta la nostra tecnologia e precisione, rimangono misteri. Le profondità oceaniche sono ancora largamente inesplorate, meno conosciute in dettaglio della superficie di Marte. L'interno profondo della Terra rimane inaccessibile all'osservazione diretta, conoscibile solo attraverso inferenze indirette da onde sismiche e campo gravitazionale. I processi dinamici che connettono superficie, atmosfera, oceani e interno profondo in un sistema complesso accoppiato sono solo parzialmente compresi.

La geodesia moderna, con la sua capacità di monitorare continuamente il pianeta dinamico, sta rivelando che la Terra non è un oggetto statico e immutabile ma un sistema vivente in continua evoluzione. Le placche tettoniche si muovono, i ghiacci polari si sciolgono e ricrescono, il livello del mare varia, il campo gravitazionale fluttua. Noi non abitiamo una sfera immobile ma un pianeta dinamico che respira, pulsa e cambia, e la geodesia ci fornisce il polso per sentire questi cambiamenti.

In questo senso, la geodesia del ventunesimo secolo è diventata inseparabile dalle scienze del clima e del sistema Terra. Le domande che ora chiediamo non sono solo "qual è la forma della Terra?" ma "come sta cambiando la forma della Terra?" e "cosa ci dicono questi cambiamenti sui processi che minacciano o sostengono la civiltà umana?"

## Riflessione Finale: Il Geoide come Metafora

Il geoide, quella superficie equipotenziale che meglio rappresenta la forma fisica della Terra, può servire come metafora finale per l'impresa scientifica stessa. Come il geoide, la scienza cerca di trovare l'ordine nascosto sotto la complessità apparente, di identificare le simmetrie e le leggi che sottendono i fenomeni. Come la determinazione del geoide richiede l'integrazione di innumerevoli misurazioni da prospettive diverse, la scienza progredisce attraverso l'accumulo e la sintesi di osservazioni, esperimenti e teorie da molteplici domini.

Il geoide non è direttamente osservabile - non possiamo "vederlo" come vediamo una montagna o un oceano. È una costruzione intellettuale, un concetto teorico che emerge

dall'analisi di dati e dall'applicazione di principi fisici. Eppure, è reale nel senso che ha potere esplicativo e predittivo: il geoide ci permette di comprendere e prevedere fenomeni osservabili come il flusso dell'acqua, la direzione della verticale, la forma degli oceani. Questa realtà delle entità teoriche, che sono invisibili ma indispensabili per la comprensione, è caratteristica della scienza moderna.

La determinazione del geoide è anche intrinsecamente collaborativa e cumulativa. Nessun singolo scienziato o generazione potrebbe determinare il geoide globale con la precisione attuale. Richiede la collaborazione di migliaia di geodeti, geofisici, ingegneri e tecnici distribuiti su tutto il pianeta e attraverso generazioni. Richiede investimenti sostanziali in infrastrutture (reti geodetiche, satelliti, supercomputer) e l'accumulo di conoscenza e tecniche su secoli. La scienza è un'impresa fondamentalmente sociale e storica, e il geoide ne è un esempio cristallino.

Infine, il geoide ci ricorda l'unità fondamentale della conoscenza. La sua determinazione richiede fisica (gravitazione, meccanica dei fluidi, elasticità), matematica (equazioni differenziali, armoniche sferiche, teoria del potenziale), astronomia (orbite satellitari, maree), geologia (distribuzione di densità, tettonica), oceanografia (circolazione, livello del mare), e tecnologia (satelliti, computer, sensori). Queste discipline non sono compartimenti separati ma aspetti di un tessuto interconnesso di comprensione. Il geoide si trova all'intersezione di molte di queste discipline e la sua determinazione richiede la loro sintesi.

Mentre guardiamo al futuro della geodesia - con le sue promesse di orologi atomici che misurano altezze con precisione millimetrica, gravimetri quantistici che rivelano strutture sotterranee a risoluzione senza precedenti, costellazioni satellitari che monitorano continuamente ogni respiro del pianeta - possiamo anticipare che nuove tecnologie riveleranno nuove complessità e solleveranno nuove questioni. Il confine della conoscenza si espanderà, ma così anche il riconoscimento di quanto rimane da scoprire.

Il geoide, in questo senso, è sia una risposta sia una domanda. È una risposta alla antica domanda "qual è la forma della Terra?" ma è anche una domanda continua: "cosa ci dice questa forma sulla struttura, l'evoluzione e il futuro del nostro pianeta?" La ricerca per comprendere sempre più profondamente e precisamente la forma del nostro mondo è una ricerca che non termina, perché ogni risposta apre nuove domande, ogni aumento di precisione rivela nuovi dettagli, ogni nuova tecnologia espande il dominio dell'osservabile.

E così, la geodesia continua, una delle più antiche scienze dell'umanità ma anche una delle più moderne, una disciplina che connette il cielo e la terra, il globale e il locale, il passato remoto e il futuro incerto. Il geoide rimane, dopo quasi due secoli dalla sua concezione formale, al centro di questa ricerca - un concetto che è al contempo semplice nella sua definizione (una superficie equipotenziale) e profondo nelle sue implicazioni, elegante nella sua formulazione matematica e complesso nella sua determinazione pratica, invisibile all'occhio ma indispensabile per la comprensione del mondo che abitiamo.

Nelle parole dello stesso Listing, che introdusse il termine nel 1863: "Il geoide è la figura matematica della Terra". Ma è molto di più: è un ponte tra geometria e fisica, tra teoria e osservazione, tra astrazione e realtà concreta. È un testamento alla capacità umana di comprendere il mondo non solo attraverso l'esperienza diretta e immediata, ma attraverso la costruzione di concetti teorici sofisticati, la conduzione di misurazioni meticolose, e

l'applicazione di analisi matematiche rigorose. È, in breve, scienza nel suo senso più profondo e più nobile.

Mentre questo saggio si conclude, il geoide e le ondulazioni geoidali rimangono oggetti di studio attivo, frontiere di ricerca che continuano ad ispirare e sfidare geodeti, geofisici e scienziati del sistema Terra. Alle domande poste dai primi geodeti greci sono state date risposte con dettagli che essi non avrebbero potuto immaginare, ma nuove domande sono emerse che richiederanno le tecnologie e le menti delle generazioni future per essere affrontate. Il viaggio della comprensione continua, guidato dalla curiosità umana, alimentato dall'ingegnosità tecnologica, e illuminato dalla luce della ragione scientifica. Il geoide, forma invisibile ma reale del nostro mondo, rimane faro e guida in questo viaggio senza fine.